Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H. U. Journal of Education) 37*(1), 345-365* [2022]

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi

Hacettepe University Journal of Education

e-ISSN: 2536-4758

Orantısal Akıl Yürütmenin Gelişimine Yönelik Varsayıma Dayalı Öğrenme Rotasının Geliştirilmesi*

Rukiye AYAN CİVAK, Mine IŞIKSAL BOSTAN***, Seçil YEMEN KARPUZCU******

Makale Bilgisi	ÖZET
Geliş Tarihi: 08.10.2019 *Kabul Tarihi*: 23.09.2020 *Erken Görünüm Tarihi*: 26.09.2020 *Basım Tarihi*: 31.01.2022	Bu çalışmanın amacı, orantısal akıl yürütmenin gelişimine yönelik Gerçekçi Matematik Eğitimi Teorisi temelli bir varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili öğretimsel etkinlik dizisinin geliştirilmesidir. Bu amaç doğrultusunda tasarı tabanlı araştırma deseni ile düzenlenen ve geliştirilen öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisi üç makro döngü süresince yedinci sınıf öğrenme ortamlarında test edilmiş, düzenlenmiş ve son haline getirilmiştir. Çalışmanın veri analizi, düzenlenen öğrenme rotası ve etkinlik dizisi kullanılarak üçüncü makro döngü kapsamında gerçekleştirilen öğretim sırasında ortaya çıkan sınıf içi söylemin Toulmin argümantasyon modeli ile yapılmıştır. Çalışmanın sonuçları, geliştirilen öğrenme rotası ve etkinlik dizisi kapsamında, gerçekçi bağlamlar içerisinde informel araçlardan formel araçlara geçiş yapılarak gerçekleştirilen oran ve orantı öğretiminin öğrencilerin bu konuyu anlamlı, kapsamlı ve sıralı olarak öğrenmeleri için önemli potansiyele sahip olduğunu göstermiştir. Çalışma kapsamında öğrencilerin öğrenmelerinin yanı sıra bu öğrenmenin nasıl destekleneceği ile ilgili yerel öğretim teorileri de ortaya konulmaktadır. Dolayısıyla, çalışmanın tasarı ve uygulamaya yönelik sonuçlarının oran, orantı ve orantısal akıl yürütme öğretiminin kalitesini arttırmak için faydalı olacağı öngörülmektedir. **Anahtar Sözcükler:** orantısal akıl yürütme, çarpımsal düşünme, Gerçekçi Matematik Eğitimi, varsayıma dayalı öğrenme rotası, tasarı tabanlı araştırma

Development of a Hypothetical Learning Trajectory for Enhancing Proportional Reasoning

Article Information	ABSTRACT
Received: 08.10.2019 *Accepted*: 23.09.2020 *Online First*: 26.09.2020 *Published*: 31.01.2022	The purpose of this study was to develop a hypothetical learning trajectory and related instructional sequence for proportional reasoning based on the theory of Realistic Mathematics Education. In line with this purpose, the hypothetical learning trajectory and related instructional sequence were developed, tested, revised, and finalized in three macrocycles conducted in seventh grade classrooms through a design-based research perspective. The classroom data that emerged during the instruction in the third macrocycle were analyzed by Toulmin's model of argumentation. Findings revealed that teaching ratio and proportion by progressing from informal to formal tools in realistic contexts has significant potential for students to learn this subject in meaningful, comprehensive, and coherent ways. Within the context of this study, in addition to analyzing a classroom community's learning, the means used to support that learning are being portrayed. In this regard, it is foreseen that the results of this study related to design and implementation would be useful for improving the quality of the teaching and learning of ratio and proportion. **Keywords:** proportional reasoning, multiplicative reasoning, Realistic Mathematics Education, hypothetical learning trajectory, design-based research

doi: 10.16986/HUJE.2020063485 Makale Türü (Article Type): Araştırma Makalesi

Kaynakça Gösterimi: Ayan Civak, R., Işıksal Bostan, M., & Yemen Karpuzcu, S. (2022). Orantısal akıl yürütmenin gelişimine yönelik varsayıma dayalı öğrenme rotasının geliştirilmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 37*(1), 345-365. doi: 10.16986/HUJE.2020063485

Citation Information: Ayan Civak, R., Işıksal Bostan, M., & Yemen Karpuzcu, S. (2022). Development of a hypothetical learning trajectory for enhancing proportional reasoning. *Hacettepe University Journal of Education, 37*(1), 345-465. doi: 10.16986/HUJE.2020063485

* Bu çalışma Orta Doğu Teknik Üniversitesi İnsan Araştırmaları Etik Kurulu'nun 07.11.2017 tarih ve 28620816/549 sayılı ve Ankara İl Milli Eğitim Müdürlüğü 08.12.2017 tarih ve 14588481-605.99-E.21143479 sayılı kararları ile etik açıdan uygun bulunmuştur. Ayrıca, bu çalışma 217K430 numaralı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) projesinden üretilmiştir.

** Dr. Öğr. Üyesi, İzmir Demokrasi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi A.B.D., İzmir-TÜRKİYE. e-posta: rukiye.aycivak@idu.edu.tr, (ORCID: 0000-0002-1278-0257)

*** Prof. Dr., Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi A.B.D., Ankara-TÜRKİYE. e-posta: misiksal@metu.edu.tr , (ORCID: 0000-0001-7619-1390)

**** Dr. Öğr. Üyesi, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi A.B.D., Kütahya-TÜRKİYE. e-posta: secil.karpuzcu@dpu.edu.tr, (ORCID: 0000-0002-2150-000X)

1. GİRİŞ

Oran ve orantı gibi orantısal akıl yürütmenin temelini oluşturan kavramlar matematik, fen ve günlük hayattaki birçok durumun temelini oluşturmaktadır (Cramer ve Post, 1993). Bununla beraber, orantısal akıl yürütme, oran ve orantı ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde bu konunun öğrencilerin en çok zorlandıkları konuların başında geldiği ve öğrencilerin bu konu ile ilgili birçok kavram yanılgısına sahip oldukları görülmüştür (De Bock, Verschaffel ve Janssens, 1998; Kaplan, İşleyen ve Öztürk, 2011; Lamon, 2007; Lesh, Post ve Behr, 1988; Lobato ve Thanheiser, 2002; Misailidou ve Williams, 2003; Thompson ve Saldanha, 2003; Toluk-Uçar ve Bozkuş, 2016; Tourniaire ve Pulos, 1985). Öğrencilerin problemi anlamlandırmadan anahtar kelime arayışına girme (De Bock ve diğerleri, 1998), önemli bilgileri göz ardı etme (Tourniaire ve Pulos, 1985), geleneksel sembolik oran gösterimlerini anlamlandıramama (Lamon, 2007), çoklukları eş güdümlü olarak yinelerken çokluklar arasındaki ilişkileri koruyamama (Thompson ve Saldanha, 2003) ve orantısal durumlar içeren problemleri çözerken yanlış ve/veya ilgisiz veri kullanma (Lobato ve Thanheiser, 2002) gibi zorluklar yaşadıkları görülmüştür. Ulusal alanda yapılan çalışmalarda ise, Kaplan ve diğerleri (2011) öğrencilerin oranı gerçek sayı gibi düşündüklerini belirtmişlerdir. Dördüncü ve yedinci sınıf aralığında bulunan öğrencilerle yapılan bir diğer çalışmada, öğrencilerin oran-orantı problemlerinde orantısal durumları ve orantısal olmayan durumları birbirinden ayırt etmede zorlandıkları görülmüştür (Toluk-Uçar ve Bozkuş, 2016; Ayan ve Işıksal Bostan, 2018). Tüm bu zorlukların ötesinde, çarpımsal durumlar için yanlış toplamsal düşünme biçimleri uygulama, ulusal ve uluslararası çalışmalarda rapor edilen en yaygın zorluktur (Atabaş ve Öner, 2017; Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto ve Miller, 1998; Duatepe, Akkuş-Çıkla ve Kayhan, 2005; Hart, 1988; Kahraman, Kul ve İskenderoğlu, 2019; Kaplan ve diğerleri, 2011; Kaput ve West, 1994; Karplus, Pulos ve Stage, 1983; Mersin, 2018; Misailidou ve Williams, 2003; Noelting, 1980, Piaget ve Inhelder, 1975; Resnick ve Singer, 1993; Tourniaire ve Pulos, 1985, van Dooren, De Bock ve Verschaffel, 2010).

Öğrencilerin yaşadıkları bu zorluklar göz önünde bulundurularak son yıllarda alanyazında deneysel çalışmalara da yer verilmiştir. Özdemir, Yıldız ve Göktepe-Yıldız'ın (2015) çalışmasının sonuçlarına göre oran-orantı ve yüzde konularının proje tabanlı öğretimi yedinci sınıf öğrencilerinin matematik başarısını ve derse karşı olan tutumunu olumlu yönde etkilemiştir. Diğer bir çalışmada şema temelli öğretim gören öğrencilerin oran-orantı içeren sözel problemlerde daha başarılı oldukları görülmüştür (Jitendra, Star, Starosta, Leh, Sood, Caskie ve diğerleri, 2009).

Yapılan çalışmalar oran ve orantı konusunda öğrencilerin yaşadıkları zorlukları ortadan kaldırma ve anlamlı öğrenme sağlamada, sunulan öğretimin önemli rol oynadığını göstermektedir. Bu bağlamda, öğrenciye sunulan materyalin ve sunuş şeklinin etkisi şüphesiz büyüktür. Ancak oran ve orantı konusunun öğretiminde öğrenci ders kitaplarında yeterli materyalin yer almadığı ve öğretmenlerin oran-orantı problemlerinde yeterli bilgiye sahip olmadığı (Harel ve Behr, 1995) belirtilmiştir. Diğer yandan, ders kitaplarında oran ve orantı konusunun diğer konulardan bağımsız bir konu olarak ve işlemsel algoritmalara (ör., içler-dışlar çarpımı) önem verilerek işlendiği ve diğer konularda orantısal akıl yürütmeye değinilmediği (Lamon, 1995) vurgulanmaktadır. Dolayısıyla, oran ve orantı konularında öğrencilerin yaşadıkları zorlukların sebebinin bu konunun işlemsel algoritmaların ezberine dayalı, yüzeysel ve kısıtlı öğretiminden kaynaklandığı söylenebilir.

1.1. Çalışmanın Amacı

Yenilenen öğretim programlarında oran ve orantı konusuna yeni kazanımlar eklenmiştir (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013, 2018). Ancak, bu kazanımlar uluslararası alanyazında vurgulanan tüm anahtar öğrenmeleri içermemektedir. Ayrıca, var olan kazanımlar belli bir sırada sunulmuş olsa da bu sıralamanın öğrencilerin oran ve orantı konusunu en anlamlı şekilde öğrenmelerini sağlayacak şekilde olup olmadığı ile ilgili deneysel (ampirik) bilgi bulunmamaktadır. Buna ek olarak, programın doğası gereği konularla ilgili öğrenme çıktılarına hangi öğrenme materyalleri ile ve nasıl bir yol izlenerek ulaşılması gerektiği program kapsamına dâhil edilmemiştir. Diğer yandan, ders kitaplarında ve ek kaynaklarda bulunan öğretim materyalleri genellikle işlemsel becerileri ön plana çıkarmakta ve kendi içerisinde belirli bir sıra barındırmamaktadır. Bu durum öğretmenler için de yeni olan ve var olan kazanımlara ulaşmayı sağlayacak öğrenme ortamları sunmada sorun oluşturmaktadır. Bu çalışma kapsamında hazırlanan materyallerin öğretmenlere oran ve orantı konusunun anlamlı, kapsamlı ve sıralı bir şekilde öğretilmesine olanak sağlayacak ve öğrencilerde orantısal akıl yürütmeyi destekleyecek bir kılavuz niteliği taşıyacak olmasından dolayı öğretim kalitesinin artırılmasında yardımcı olacağı düşünülmektedir. Bu bağlamda, çalışmanın amacı, 7. sınıf öğrencilerine oran ve orantı konusunu en anlamlı, kapsamlı ve sıralı şekilde öğretebilmek için Gerçekçi Matematik Eğitimi (GME) Teorisi temelli bir varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili öğretimsel etkinlik dizisinin geliştirilmesidir.

1.2. Teorik Çerçeve

1.2.1. Orantısal akıl yürütmenin temelleri

Orantısal durumlar doğasında çarpımsal ilişkiler içerdiğinden dolayı, orantısal akıl yürütme için çarpımsal düşünce becerisi gereklidir (Singh, 2000). Diğer yandan, orantısal akıl yürütme toplamsal düşünme ve çarpımsal düşünme gerektiren problemleri ayırt etmeyi ve problemin çözümünde uygun düşünme biçimini uygulamayı da gerektirir (Cramer ve Post, 1993). Kısaca açıklamak gerekirse, çarpımsal düşünme ilişkili çokluklar arasındaki çarpımsal (kat) ilişkinin bu çokluklara karşılık gelen diğer çokluklara uygulanmasını gerektirirken toplamsal düşünme problem durumunda verilen ilişkili çoklukların arasında çıkarma işlemi yapılarak elde edilen farkın diğer çokluklar arasında da uygulanması ile ilgilidir (Tourniaire ve Pulos, 1985).

Bazı çalışmalarda çarpımsal düşünmenin temelinin tekrarlı toplama olduğu öne sürülse de Steffe (1994) çarpımsal düşünmenin temelinin [tekrarlı toplamadan ziyade] birleşik birimleri bağlama (linking composite units) ve bağlı birleşik birimleri yineleme (iterating linked composites) olduğunu ortaya koymuştur. Birleşik birimleri bağlama becerisi, farklı çoklukları sayılabilir birer birim olarak aldıktan sonra bu çoklukların birbirine bağlanması ile ilgilidir. Bu şekilde öğrencilerin bir birime dair sayma şeması ile başka bir birime dair sayma şemasını koordine etme becerisi geliştirdikleri belirtilmiştir (Steffe, 1994). Steffe'nin (1994) çalışmalarının devamında, Battista ve Borrow (1995) birleşik birimleri yineleme becerisini bir grubu sayılabilir bir birim alarak ve bu birimi oluşturan elemanların yapısını değiştirmeden tekrarlama olarak tanımlamışlardır. Öyle ki bahsi geçen çalışmalarda öğrencilerin, bu beceriyi kazandıktan sonra bu becerilerini oran durumlarına genişletebilecekleri öne sürülmüş ve bu becerinin özellikle artırma (build-up) stratejisinin kullanımında temel olduğu savunulmuştur. Nitekim, Battista ve Borrow (1995) tekli grupları ve birbirine bağlı çoklu grupları yineleme becerilerini orantısal akıl yürütmenin erken stratejileri olarak nitelendirmişlerdir. Buna göre, çoklukları birebir ya da bire-çok eşleştirerek birleşik birimler oluşturma, birleşik birimleri birbirine bağlama ve bu bağlı birleşik birimleri yineleme çarpımsal düşünme, dolayısıyla orantısal akıl yürütme, için gerekli olan önemli ve temel bir zihinsel süreçtir.

Çarpımsal düşünme bağlamında birleşik birimler oluşturma ya da birimleme (unitizing) ve bunları yinelemenin nihai amacı bu birimi referans alarak yeni bir durumun biçimlendirilmesi (norming) ile ilgilidir (Lamon, 1994). Biçimlendirme aynı birimli ya da farklı birimli çokluklar arasında yapılabilir. Aynı birimli çokluklar arasında yapılan biçimlendirme ölçeklendirme katsayısı (scale factor) ile ilgiliyken farklı birimler arasında yapılan biçimlendirme çokluklar arasında değişmeyen (invariant) fonksiyonel ilişkiler ile ilgilidir (Lamon, 1994). Aşağıdaki örnekte, verilen çokluklar arasındaki yatay ilişkiler aynı birimli çokluklar arasında ölçeklendirme katsayısı ile yineleme yapmayı temsil ederken, dikey ilişkiler farklı birimli çokluklar arasındaki fonksiyonel ilişkileri temsil etmektedir. Öğrencilerin orantısal akıl yürütmelerinin geliştirilmesi için bu ilişkilerin farklı bağlamlar içerisinde anlamlandırılması ve orantının sembolik gösteriminde de yapılandırılması gerekmektedir.

1. çokluk Alınabilecek balon sayısı (adet)
2. çokluk Fiyat (TL)

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, "\times 5"] \arrow[d, bend right, "\times 2"'] & 15 \arrow[d, bend left, "\times 2"] \\ 6 \arrow[r, "\times 5"'] & 30 \end{tikzcd}$$

Şekil 1. Aynı ve farklı birimli çokluklar arasında yapılan çarpımsal kıyaslamalar (biçimlendirme)

Bu iki türlü biçimlendirme çarpımsal düşünmenin, dolayısıyla orantısal akıl yürütmenin, temelini oluşturur. Birçok çalışmada öğrencilerin bu ilişkileri anlamlandırmak ve temsil etmek için sezgisel olarak Şekil 1'de görüldüğü gibi tablo benzeri gösterimler ya da oran tabloları kullandıkları görülmüştür (Kenney, Lindquist ve Heffernan, 2002). Bunun yanı sıra, oran tabloları kullanılarak yapılan öğretimin öğrencilerin orantısal akıl yürütmelerinin geliştirilmesinde önemli rol oynadığı (Dole, 2008; Middleton ve van den Heuvel-Panhuizen, 1995; Streefland, 1984, 1985) ve informel bilgilerden formel oran ve orantı gösterimlerine geçişi desteklediği (Ayan-Civak, 2020) belirtilmiştir. Bu çalışmanın amacı ise GME çerçevesinde öğrencilerin birimleme, biçimlendirme ve birleşik birimleri yineleme gibi informel bilgilerinden formel oran ve orantı gösterimlerine geçişi destekleyecek bir varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili öğretimsel etkinlik dizisinin geliştirilmesidir.

1.2.2. Gerçekçi Matematik Eğitimi (GME)

GME somut ve informel çözüm stratejilerini formel matematik bilgiye dönüştürebilmede ön plana çıkan bir öğretim teorisidir. Gravemeijer'e (1999) göre, formel matematik ulaşılmayan uzak bir kavram olarak değil, öğrencilerin etkinliklerinde gelişmeli ve informel bilgilerinden yararlanılarak ortaya çıkarılmalıdır. GME belli temel ilkelere dayanır. Bu temel ilkeler yönlendirilmiş yeniden keşfetme (guided reinvention), öğretici olgu (didactical phenomenology) ve gelişen modeller (emergent models) olarak belirtilmiştir (Gravemeijer, 1999). Yönlendirilmiş yeniden keşfetme ilkesine göre öğrencilere informel çözüm stratejilerini kullanabilecekleri iyi seçilmiş bağlamsal problemlerin sunulması gerekir (Gravemeijer ve Doorman, 1999). İyi seçilmiş bağlam problemleri öğrencilerin informel ve bağlam içerikli çözüm stratejileri üretmeleri için fırsatlar sunar (Gravemeijer ve Doorman, 1999). Bu informel çözüm stratejileri daha sonrasında matematikleştirme denilen daha formel ve genelleştirmeye dayalı bilginin keşfine olanak sağlar (Gravemeijer, 1994). Bu ilkeye göre, öğrencilerin öğretmen ve öğretim materyalleri eşliğinde matematiği yeniden keşfedecekleri ortamlar sağlanmalıdır. Öğretici olgu (Didaktik fenomenoloji) ilkesi matematiksel kavramların nasıl oluştuğunu belirleyebilmekle ilgilidir. Bu kapsamda çevresel problemler uyarıcı olarak kullanılabilmekte ve matematiksel kavramlar sürecin yeniden keşfi ile kazanılmaktadır. Bu anlamda öğrencilerin öğrenmelerini sağlayacak uygun öğretim materyallerinin hazırlanması ve hazırlanan etkinliklerin matematikleştirmeye yardımcı olabilecek etkinlikler olması önemlidir. Gelişen modeller ilkesi informel bilgiden formel matematik bilgisini oluştururken problem çözme sürecinde uygun modeller geliştirilmesi ile ilgilidir. Öğrenciler var olan modelden daha gelişmiş modele doğru ilerlerler (Gravemeijer ve Doorman, 1999). Sonuç olarak, mevcut çalışmada geliştirilen etkinlikler ve öğretim ortamı GME ilkeleri göz önüne alınarak tasarlanmıştır.

1.2.3. Varsayıma Dayalı Öğrenme Rotaları (Hypothetical Learning Trajectories)

Varsayıma dayalı öğrenme rotaları yapılandırmacı yaklaşımın sınıf ortamına somut olarak aktarılmasına katkı sağlamak amacıyla Simon (1995) tarafından ortaya atılmıştır. Clements ve Sarama (2004) ile Confrey, Maloney ve Corley (2014) öğrenme rotalarını tanımlamış ve bu kavramın gelişmesine katkı sağlamışlardır. Bahsi geçen çalışmalarda bireysel öğrenme rotalarından bahsedilirken, Stephan (2015) bireysel öğrenme rotalarının değişiklik gösterebileceğini belirtmiş ve önceki araştırmacılardan farklı olarak bir sınıfa ait öğrenme rotaları (classroom learning trajectories) kavramını ortaya atmıştır. Stephan'a (2015) göre, bireysel öğrenme rotaları öğretmenle ya da araştırmacılarla yapılan birebir öğretim deneyleri sonucu oluşurken sınıfa yönelik öğrenme rotaları bir sınıftaki öğrencilerin birbirleriyle ve öğretmenle etkileşimleri sürecince oluşur. Bu bağlamda, belli bir konunun öğretiminde sınıf içi tartışmalardan doğan fikirler tüm sınıfça kabul görmeli ve bu süreçte belirli bir konunun öğretimine yönelik araçlar, imgeler, etkinlikler, fikir paylaşımı ve muhtemel matematiksel söylemler öğrenme rotalarının bileşenlerini oluşturmalıdır (Gravemeijer, Bowers ve Stephan, 2003; Stephan, 2015). Benzer şekilde, bu çalışma kapsamında Stephan'ın (2015) yaklaşımı temel alınarak GME çerçevesinde yedinci sınıf öğrencilerinin orantısal akıl yürütmeyi en anlamlı, kapsamlı ve sıralı şekilde öğrenebilmelerine yönelik bir sınıfa ait varsayıma dayalı öğrenme rotasının düzenlenmesi ve geliştirilmesi hedeflenmiştir.

2. YÖNTEM

Bu çalışma, genel amacı 7. sınıf öğrencilerine oran ve orantı konusunun en anlamlı, kapsamlı ve sıralı bir şekilde nasıl öğretilebileceğinin belirlenmesi olan üç yıllık bir tasarı tabanlı araştırma projesinin parçasıdır. Çalışma kapsamında orantısal akıl yürütmeye yönelik anahtar öğrenmelerin (big ideas) geliştirilmesini sağlayacak araç, imge, etkinlik ve sınıf içi söylemleri içeren varsayıma dayalı bir öğrenme rotasının ve ilgili etkinlik dizisinin geliştirilmesi hedeflenmiştir.

2.1. Çalışma Deseni

Tasarı tabanlı araştırmanın amacı, sadece sınıfta olanları betimlemek değildir; ayrıca, muhtemel öğrenme süreci ve bu öğrenme sürecini destekleyecek öğretimsel araç, etkinlik, yöntem, sınıf kültürü ve öğretmenin rolü ile ilgili kanıları (conjectures) içeren yerel öğretim teorilerini (local instruction theories) desteklemek ve başka durumlardaki öğretime veya tasarıma durum oluşturacak nitelikte teorik altyapı oluşturmaktır (Gravemeijer ve Cobb, 2006). Farklı bir ifade ile, tasarı tabanlı araştırmaların amacı hem öğrenmeye yönelik hem de öğrenmeyi destekleyen teoriler geliştirmektir. Gravemeijer ve Cobb'a (2006) göre tasarı tabanlı araştırma üç aşamadan oluşur. Bunlar (1) Uygulama için hazırlık, (2) Sınıf içi uygulama ve (3) Geriye dönük analizlerdir. Hazırlık aşamasında varsayıma dayalı öğrenme rotası ve etkinlik dizisini içeren tasarı deneyini oluşturmak hedeflenir. İkinci aşamada hazırlık aşamasında geliştirilen tasarının test edilmesi, geliştirilmesi ve nasıl çalıştığının anlaşılması hedeflenir. Tasarı tabanlı araştırma, araştırmacıların sınıf içinde bulunmalarını ve her ders saatinden sonra iş birliği yapılan öğretmenle ders hakkında yorumda bulunmayı gerektirir. Bu sebepten, tasarı tabanlı araştırmada veriler süregelen yorumlar, bağlantılar, kanılar ve kararlardan oluşur. Bu anlamda öğrenme rotaları ve tasarı tabanlı araştırma birlikte düşünülebilir.

Bu bağlamda, mevcut çalışmada GME teorik çerçevesi ve orantısal akıl yürütmeye yönelik anahtar öğrenmelerin gelişimine yönelik geliştirilen varsayıma dayalı öğrenme rotası ve etkinlik dizisi ortaya konmuştur. Bu çalışmada alanyazında karşılaşılan ve Amerikalı araştırmacılar Stephan, McManus, Smith ve Dickey (n.d.) tarafından geliştirilen oran ve orantı öğretimine yönelik bir sınıfa ait varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisi temel alınmıştır. Dolayısıyla, mevcut çalışma kapsamında, bu öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisine birçok uyarlama ve düzenleme yapılması için tasarı tabanlı araştırma modeli kullanılmıştır.

2.2. Bağlam ve Katılımcılar

Çalışmanın amaçları doğrultusunda, orantısal akıl yürütmeye yönelik anahtar öğrenmelerin gelişimine yönelik bir varsayıma dayalı öğrenme rotası ve öğrencilerin bu anahtar öğrenmelere ulaşmalarını destekleyecek bir öğretimsel etkinlik dizisinin prototipleri geliştirilmiştir. İlk olarak iş birliğine açık, anlamlı öğrenmeye önem veren ve oran-orantı konusunun öğretiminde yedi yıllık deneyime sahip bir ortaokul matematik öğretmeni seçilmiştir. Bu öğretmenin görev yaptığı okul, Ankara ili Altındağ ilçesinde bir devlet ortaokuludur. Bu okul genel olarak düşük sosyoekonomik düzeyli ailelerin çocuklarının öğrenim gördüğü, yaklaşık olarak 600 öğrenci ile 40 öğretmenin bulunduğu ve 25-35 kişilik sınıflardan oluşan bir okuldur. Araştırmanın ilk iki makro döngüsü peş peşe iki öğretim yılında, bu öğretmen ve bu öğretmenin her yıl birer yedinci sınıf şubesindeki öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir. Seçilen sınıftaki öğrencilerin grup çalışması ve matematiksel argümantasyon yapma beceri ve alışkanlıklarına sahip olma şartları aranmıştır. Bunun sebebi, GME kapsamında öğrencilerin informel bilgilerini ortaya koyabilme ve bu bilgilerinden yola çıkarak argümantasyon temelli bir öğretim ortamında oran ve orantı konusuna yönelik formel bilgiyi tüm sınıf tartışması sürecinde yapılandırmalarının hedeflenmesidir.

Geliştirilen etkinlikler önce küçük grup çalışması ve sonrasında tüm sınıf tartışmasının yer aldığı argümantasyon temelli bir sınıf ortamında uygulanmıştır. Tasarı tabanlı araştırmanın doğası gereği bu iki makro döngü sırasında ve sonrasında varsayıma dayalı öğrenme rotasına ve etkinlik dizisine birçok düzenleme yapılmıştır. Bu düzenlemeler etkinliklerin içeriğinden sıralamasına kadar birçok alanda gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte yapılan düzenlemelere bu araştırma kapsamında yer verilmemiştir. Bu çalışmanın amacı, yapılan bu düzenlemelerin ardından üçüncü makro döngü kapsamında uygulanan öğrenme rotası ve etkinlik dizisinin son halinin ortaya konması ve son uygulama kapsamında ortaya çıkan sınıf içi tartışmalara yer verilerek öğretimsel etkinlik dizisinin etkililiğinin göz önüne serilmesidir.

Uygulamanın üçüncü makro döngüsü, aynı öğretmen ve bu öğretmenin bir yedinci sınıf şubesindeki öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir. Bu öğrenciler, öğretmenin görüşü doğrultusunda, önceki döngüde olduğu gibi, grup çalışması ve matematiksel argümantasyon yapma beceri ve alışkanlıklarına sahip oldukları için seçilmişlerdir. Aşağıdaki tabloda üç makro döngü kapsamında uygulama yapılan sınıflardaki öğrencilerin sayıları ve cinsiyet dağılımları verilmiştir.

Tablo 1.
Döngüsel Uygulamalara Katılan Öğrenci Sayıları ve Cinsiyet Dağılımları

Döngüsel uygulamalar	Kız	Erkek	Toplam
Makro döngü 1	12	15	27
Makro döngü 2	11	14	25
Makro döngü 3	15	17	32

2.3. Veri Toplama Araçları

Tasarı tabanlı araştırma çalışmalarında hazırlanan tasarının sonuçlarının değerlendirilmesi ve geliştirilmesi için çok sayıda veri toplama aracından yararlanılır (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer ve Schauble, 2003). Ayrıca, hazırlanan tasarı öğretimin önemli bileşenleri olan etkinlikler, kullanılan araçlar, sınıf içi tartışmalar ve söylemler, öğrencilerin tartışmalara katılım biçimleri ve öğretmenin öğrenmeyi desteklemek için kullandığı öğretimsel davranışlar da tasarı tabanlı araştırmalarda analiz edilmesi gereken bileşenlerdir (Cobb ve diğerleri, 2003).

Bu çalışmanın verileri geliştirilen varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisinin uygulanması sırasında ortaya çıkan öğretimin video kayıtları ile tasarı ekibi toplantılarının ve öğretmenle yapılan çözümleme (debriefing) toplantılarının sesli kayıtlarından oluşmaktadır. Bundan sonraki bölümlerde, ilk olarak, tasarı tabanlı araştırmanın doğasına uygun olarak tasarının en önemli parçalarından birini oluşturan varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisi ile ilgili bilgi verilmektedir. Sonrasında, öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisine yapılması gereken düzenlemeleri belirlemek için kullanılan veri toplama araçları anlatılmaktadır.

2.3.1. Varsayıma Dayalı Öğrenme Rotası ve Öğretimsel Etkinlik Dizisi

Varsayıma dayalı öğrenme rotası, iki temel unsur doğrultusunda oluşturulmuştur. İlki, çarpımsal düşünmenin geliştirilmesinden yola çıkılarak orantısal akıl yürütmenin gelişimine yönelik anahtar öğrenmeler, ikincisi ise bu anahtar öğrenmelere ilişkin belirlenen bağlamlardır. Bu doğrultuda hazırlanan etkinlik dizisinde yer alan etkinlikler Tablo 2'de sırasıyla verilmiştir.

Tablo 2.
Varsayıma Dayalı Öğrenme Rotasında Yer Alan Anahtar Öğrenmeler ve İlgili Etkinlikler

Anahtar Öğrenme	Etkinlik No.	Etkinlik Adı
Birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme	Etk 1	Balıkları besleyelim
Birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme Çarpımsal düşünme-birim oran	Etk 2	Tariflerle kek ve meyve suyu yapalım
Birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme Çarpımsal düşünme, informel oran dili	Etk 3	Anket sonuçlarından yola çıkalım
Birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme Çarpımsal düşünme Oran ve orantının sembolik olarak yapılandırılması	Etk 4	Orantı kuralım
Oranları kıyaslama	Etk 5	Karışımların tatlarını kıyaslayalım

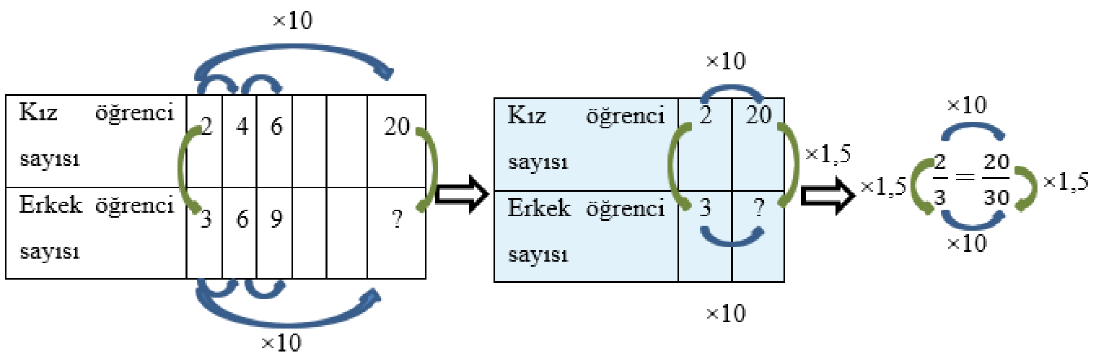
Çarpımsal düşünmenin temeli birleşik birimler oluşturma, birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yinelemedir. Bu temel, Balıkları besleyelim (Etk 1) etkinliğinde, belirli bir sayıda yem kutusu ile belirli bir sayıda balığın beslenebildiğine yönelik kuralın (ör., 1 yem kutusu ile 3 balık beslenir) yer aldığı ve her bölümde aşamalı olarak bu kuralın değiştiği (ör., 2 yem kutusu ile 4 balık beslenir, 3 yem kutusu ile 5 balık beslenir) bir bağlamda verilmeye başlanmıştır. Bu bağlam içerisinde, öğrencilerin verilen kurala göre balık ve yem kutusu sayılarını birbirine bağlayarak, ilk olarak resimler kullanarak, sonrasında ise uzun oran tabloları ve kısaltılmış oran tabloları üzerinde yinelemeler yaparak farklı durumlar için verilmeyen yem/balık sayılarını bulmaları istenmiştir. Öğrencilerin bu süreçte ilk olarak artırma stratejisi (ör., 1 yem kutusu-3 balık, 2 yem kutusu-6 balık, 3 yem kutusu-9 balık vb.) kullanarak yineleme yapmaları beklenmiştir. Sonrasında, bu yinelemelerin yapılması için öğrencilere uzun oran tabloları tanıtılmıştır. Tablolar üzerinde artırma stratejilerini uyguladıktan sonra, öğrencilerin kısaltılmış artırma stratejisini (ör., yem kutusu sayısı 3 katına çıktığında bu kutularla beslenebilecek balık sayısı da 3 katına çıkar) keşfetmeleri beklenmiştir. Bu ilk etkinliğin detayları, resimler ve uzun oran tablolarından kısa oran tablolarına geçiş süreci önceki bir çalışmada detaylı olarak anlatılmıştır (bk. Ayan-Civak, 2020). Bu çalışma kapsamında balık ve yem bağlamında keşfedilen bu stratejilerin ve düşünüş biçimlerinin farklı bağlamlarda pekiştirilmesi ve kısa tablolardan orantının sembolik olarak yapılandırılmasına geçiş süreci, informel ve formel oran ve orantı gösterimlerinin anlamlandırılması ve yapılandırılması süreçlerine odaklanılmıştır.

Etkinlik 2 kapsamında, ilk kısımda, kek tarifi bağlamı kullanılmış ve öğrencilere 8 kişilik kek yapmak için gerekli olan malzemelerin listesi tablo içerisinde verilmiştir. Bu bilgiye dayalı olarak öğrencilerden 4 ve 12 kişilik kek tarifleri için gerekli malzemelerin miktarlarını bulmaları istenmiştir. Burada, öğrencilerin balık ve yem bağlamında keşfettikleri stratejilere dayanarak hem yinelemeye yönelik ilişkiler (ör., un miktarı yarıya düşerse şeker miktarı da yarıya düşer vb.) hem de çarpımsal ilişkiler (ör., un her durumda şekerin 3 katı olmalıdır, sıvıyağ miktarı ile şeker miktarı her durumda eşit olmalıdır vb.) kurmaları beklenmiştir. Diğer yandan, bu ilişkileri temsil etmek için araç olarak verilen tablo üzerinde yatay ve dikey okları ve bu okları temsil edecek yatay ve dikey el hareketleri (jest) kullanmaları öngörülmüştür.

Etkinlik 2'nin ikinci kısmında ise 6 portakal ve 4 elma sıkılarak elde edilen meyve suyu karışımı ile aynı tada sahip karışımlar yapılması istenmiştir. Bu kapsamda, ilk olarak 60 portakal için gerekli olan elma miktarını, sonrasında ise 24 elma için gerekli olan portakal miktarını bulmak için (yanlış) toplamsal düşünme biçimi kullanan öğrencilerin cevapları ile çarpımsal düşünme biçimi kullanarak cevap veren öğrencilerin cevaplarından hangisinin doğru olduğunun belirlenmesi istenmiştir. Yanlış toplamsal düşünme biçimi oran ve orantı konusunda en çok karşılaşılan kavram yanılgılarından biridir. Yanlış toplamsal düşünme biçimi daha önce sınıf içerisindeki söylemde ortaya çıkmamışsa bile bu soruda verilen öğrenci cevapları tartıştırılarak öğrencilerin çarpımsal durumlar için yanlış toplamsal düşünme kullanımlarının önüne geçilmesi ve varsa toplamsal düşünme biçimlerinin çarpımsal düşünme biçimine dönüştürülmesi amaçlanmıştır. Yine bu soruda parça-parça ve parça-bütün ilişkilerine değinilerek informel oran dili (ör., karışıma eklenen her 3 portakal için 2 elma eklenmelidir) ve informel birim oran (ör. tüm karışımlarda her 3 portakal için 2 elma bulunmalıdır) kullanımının ve kısa tablolarda yatay ve dikey ilişkilerin sınıf içi söylemde ortaya konması öngörülmüştür.

İlk iki etkinlikte uzun ve kısa oran tabloları kullanarak yinelemeler yapan ve günlük hayat bağlamında çarpımsal ilişkiler hakkında muhakeme yapan öğrencilerden, Etkinlik 3 kapsamında farklı konularda yapılan anket sonuçlarından informel oran dili kullanılan çıkarımlara dayanarak farklı durumlar için verilmeyen çoklukları bulmaları istenmiştir. İlk olarak, parça-parça ilişkisini içeren, Ebru'nun okulunda okula servisle gelen 3 öğrenciye karşılık 7 öğrencinin okula yürüyerek geldiği bilgisi verilmiştir. Her bir soruda okula servisle veya yürüyerek gelen öğrenci sayılarından biri verilerek diğer gruptaki öğrenci sayısının bulunması istenmiştir. Etkinliğin ikinci kısmında, parça-bütün ilişkisini içeren, Hasan'ın okulunda her 8 öğrenciden 5'inin en az bir kardeşi olduğu diğerlerinin kardeşinin olmadığı bilgisi verilmiş ve ilk kısma benzer şekilde bir bütünün eş olmayan iki parçası arasında ve parçalar ile bütün arasındaki ilişkilere odaklanılmıştır. Bunun yanı sıra, parça-parça ve parça-bütün ilişkilerine ve kısa oran tablolarında yatay ve dikey ilişkilere bu bağlamda da değinilerek informel bilgilerden daha formel bilgilere geçişin desteklenmesi hedeflenmiştir. Etkinlik 1 ve 2'deki etkinliklere ek olarak, bu etkinlikte parça ile parça arasında bağlama/yineleme yapılmasının yanı sıra parça ile bütün arasında da bağlama/yineleme yapılabilmektedir.

İlk üç etkinlik kapsamında ölçeklendirme kat sayısı kullanılarak bağlı birleşik birimlerin yinelenmesi (ör., tablolarda yatay ilişkiler: okula servisle gelen kişi sayısı 3 katına çıkarsa yürüyerek gelen kişi sayısı da 3 katına çıkar), informel birim oran (ör., tablolarda dikey ilişkiler: okula servisle gelen her 3 öğrenciye karşılık 7 kişi yürüyerek gelmektedir) ve parça-parça/parça-bütün ilişkilerine yönelik çalışmalar yürütüldükten sonra, dördüncü etkinlik kapsamında oran ve orantının sembolik olarak yapılandırılmasına geçiş amaçlanmıştır. Bu doğrultuda, bu etkinlik birbirine eşit oranlar oluşturularak formel oran ve orantı kavrayışlarının farklı bağlamlarda uygulanması ve sonrasında farklı oranların kıyaslanarak birbirine eşit olup olmadığının belirlenmesi; yani, iki çokluğun orantılı olup olmadığının belirlenmesi üzerine kurulmuştur. İlk olarak 7-B sınıfında kız öğrencilerin sayısının erkek öğrencilerin sayısına oranının 2:3 olduğu bilgisi verilmiş ve farklı durumlarda kız (ya da erkek) sayısı verilerek erkek (ya da kız) sayısı sorulmuştur. Burada hedefler şunlardır. Birincisi, farklı durumlardaki kız-erkek öğrenci sayılarının verilen orandan yola çıkarak ve kısa oran tablosunda yatay ve dikey ilişkiler kullanarak bulunmasıdır. İkincisi, buraya kadarki tüm süreçte kullanılan kısa oran tablolarının kenarlıkları kaldırılarak eş iki oranın kesir çizgisi kullanılarak yapılandırılması, sonrasında aralarına eşittir "=" işareti konularak orantının sembolik gösterimine geçiş yapılmasıdır. Bu şekilde GME Teorisi'ne uygun biçimde informel araçlardan (uzun ve kısa oran tabloları) bağlamlar içerisinde formel araçlara (oran ve orantının sembolik gösterimi) geçiş sürecinin desteklenmesi amaçlanmıştır. GME'nin gelişen modeller ilkesi kapsamında uzun oran tablolarından kısa oran tablolarına ve nihayetinde oran ve orantının sembolik gösterimine geçiş süreci aşağıda Şekil 2'de özetlenmiştir.



Şekil 2. Gelişen modeller ilkesi kapsamında oran ve orantının sembolik gösterimine geçiş süreci

Dolayısıyla, bu etkinliğin temelinde öğrencilerin kısa oran tablolarında dikey ve yatay ilişkiler kurarak çarpımsal düşünceyi uygulamaları ile birlikte formel olarak oran ve orantı gösterimini uygulamaları vardır. Bununla birlikte, öğrencilerin oran tablolarında keşfettikleri yatay ve dikey ilişkilere dayanarak orantı gösterimindeki ilişkilerin keşfedilmesi amaçlanmaktadır. Dördüncü etkinliğin son bölümünde ise, kız sayısının erkek sayısına oranını ifade eden farklı oran değerleri verilmiş ve bunlardan hangilerinin 7-B sınıfına ait olabileceği sorulmuştur. Etkinliğin bu kısmında, daha önceden eşit oranlar kurarak orantısal ilişkileri keşfeden öğrencilerin bilinen oran ile verilen oranların eşitliğini analiz ederek birbirine eşit olan ya da olmayan oranları belirlemeleri hedeflenmiştir. Bu şekilde, bu kısımda yapılan çalışmaların, bir sonraki anahtar öğrenme olan oranları kıyaslama için temel oluşturması öngörülmüştür.

Son etkinlikte (Etk 5) ise, farklı bağlamlar içerisinde orantısallığın incelenerek iki oranın orantılı olup olmadığının belirlenmesi ve aynı veya farklı birimli çokluklar arasındaki oranların kıyaslanarak bağlamlar içerisinde hangisinin küçük/büyük olduğuna karar verilmesi hedeflenmiştir. Dolayısıyla, bu etkinlik kapsamında, iki çokluğun orantılı olup olmadığının kıyaslanmasının yanı sıra, verilen bağlam içerisinde oranlardan hangisinin daha büyük/küçük değere sahip olduğunun belirlenmesi de hedeflenmiştir. Bu hedef öğrencilerin informel ve formel oran ve orantı kullanımları ile çarpımsal düşünceyi uygulamaları üzerine kuruludur. Bu etkinlik Noelting (1980)'in çalışmasından uyarlanmıştır ve farklı sürahiler ve bu sürahilerin içerisinde bulunan farklı miktarlardaki portakal suyu ve su karışımları bağlamını içermektedir. Bu etkinliğin ilk bölümünde, öğrencilerden içerisinde farklı miktarlarda portakal suyu ve su olan karışımların ikişerli olarak kıyaslanarak bu ikililerden hangisinin daha güçlü portakal tadına sahip olacağını belirlemeleri ve gerekçelerini sunmaları istenmiştir. Bu bölüm, farklı stratejiler üreterek iki oranı karşılaştırma üzerine kurulmuştur. Bu stratejiler öğrencilerin daha önceki etkinliklerde geliştirdikleri stratejileri kapsamaktadır. Örneğin, ilk dört etkinlik kapsamında ortaya konulan ve geliştirilen birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme anahtar öğrenmelerine yönelik artırma stratejileri, kısaltılmış artırma stratejileri, tablolarda ve/veya sembolik orantı gösteriminde yatay ve dikey ilişkiler, parça-parça ve parça-bütün oranlarının kurulması ve birim oran stratejileri bu stratejilerdendir. Ayrıca, karışımdaki portakal suyu başına düşen su miktarı veya su başına düşen portakal suyu miktarına göre farklı stratejiler birim oran stratejisine örnek olarak verilebilir. Diğer yandan, burada öğrencilerin oranla ilgili çeşitli kavram yanılgılarının ortaya çıkabileceği öngörülmüştür. Örneğin, öğrenciler yanlış toplamsal düşünme biçimleri göstererek sürahilerdeki su ve portakal suyu miktarları arasındaki farkın eşit olduğu karışımların (ör., 2 bardak su 3 bardak portakal suyu ile 4 bardak su ve 5 bardak portakal suyu) tatlarının aynı olacağını düşünebilirler.

Etkinliğin (Etk 5) ikinci bölümü ise, bir karışıma aynı miktarda su ve portakal suyu eklenmesiyle karışımın tadının değişmeyeceği kavram yanılgısı üzerine kurulmuştur. Yukarıda bahsedilen yanlış toplamsal düşünme biçimi etkinliğin ilk bölümünde sınıf içi söylemde ortaya çıkmasa bile bu bölümde tartışılacaktır. Burada oranlar kıyaslanırken karışımlara eklenen miktarların karışımda var olan portakal suyu ve su miktarlarına ya da ilk durumdaki portakal suyu ve su miktarları arasındaki ilişkiye yapacağı etkinin tartışılması hedeflenmiştir. Diğer bir deyişle, oranları karşılaştırırken toplamsal ve çarpımsal düşüncenin birlikte uygulanması ve aralarındaki farkın keşfedilmesi hedeflenmiştir. Bunun yanı sıra, öğrencilerin informel oran dili kullanımlarının ortaya konması ve geliştirilmesi de etkinliğin hedeflerinden birisidir. Ayrıca, parça-parça arasında ya da parça-bütün arasında verilen ilişkilerden yola çıkarak öğrencilerin parçaların kendi arasında ve parçalar ile bütün arasındaki ilişkileri anlamlandırarak karışımı değerlendirmeleri amaçlanmıştır. Etkinliğin üçüncü bölümünde, ilk iki bölümde yapılan işlemlere ve stratejilere dayanarak, bir karışımın tadının (yoğunluğunun), karışımın içerdiği malzemelerin birbirlerine oranına veya tüm karışımdaki oranına bağlı olduğu düşüncesinin gelişmesi beklenmiştir. Diğer bir deyişle, bu kısımda, öğrencilerin bir karışımın tadını oluşturan bileşenleri ve bunlar arasındaki ilişkileri incelemeye yönelik çalışmalarda bulunacakları öngörülmüştür.

2.3.2. Tasarı ekibi toplantıları

Çalışmanın her üç makro döngüsü süresince tasarı ekibini oluşturan araştırmacılar ve öğretmen ders öncesinde bir araya gelmişlerdir. Bu ekip dersin amaçları, kullanılacak materyal, etkinlik, araç, imge, sınıf tartışmasına yön verecek kritik sorular ve bu sorulara verilmesi muhtemel öğrenci cevapları ve öğrencilerin muhtemel öğrenme rotaları üzerinde tartışarak düşünsel deney (anticipatory thought experiment) çalışmaları yapmışlardır. Derslerden sonraki birkaç gün içerisinde bu ekip tekrar bir araya gelerek gerçekleştirilen derslerin olumlu ve olumsuz yönlerini tartışarak sonraki dersler ve sonraki döngü(ler) için çıkarımlarda bulunup bazı kanılara varmışlardır. Bu görüşmeler sesli kayıt altına alınmıştır.

2.3.3. Öğretmenle yapılan çözümleme (debriefing) görüşmeleri, gözlem ve saha notları

Her üç makro döngü uygulaması süresince araştırmacılardan biri derste katılımcı-gözlemci olarak hazır bulunmuş ve dersi video kayıt altına almıştır. Her dersin hemen sonrasında araştırmacı ile öğretmen gerçekleştirilen derste öğrencilerin öğrenmelerine ve gelişimlerine yönelik görüşmeler yapmışlardır. Bu görüşmelerde uygulanan etkinliklerin öğrencilerin öğrenmelerine faydası ve bir sonraki ders ve döngü(ler) için yapılacak düzenlemeler ile ilgili fikir birliğine varmaya çalışmışlardır. Bu görüşmeler sesli kayıt altına alınmıştır. Ayrıca, gözlem yapmak için sınıf içi uygulamalarda hazır olarak bulunan araştırmacı sınıfta gerçekleşen olaylar ve öğrenmeler üzerine detaylı notlar almıştır. Bu notlar çoğunlukla sınıfın fiziksel ve sosyal ortamı ve ders esnasında gerçekleşen sınıf içi tartışmalar, etkinlikler, matematiksel süreçler, kullanılan araçlar, modeller, jest ve mimikler ile ilgilidir.

2.4. Veri Analizi

Araştırma süreci, tasarı tabanlı araştırmanın aşamaları (Gravemeijer ve Cobb, 2006) doğrultusunda, hazırlık aşaması, uygulama aşaması ve geriye dönük analizler olmak üzere üç ana başlık altında gerçekleşmiştir. Tasarı ekibi toplantıları ve çözümleme toplantılarının sesli kayıtları öğretimin etkililiğinin incelenmesi ve sonraki döngüler için yapılacak düzenlemelerin ortaya konulması için nitel yöntemler kullanılarak analiz edilmiştir. Sınıf içinde gerçekleşen öğretim, etkileşim, matematiksel söylem ve süreçleri analiz etmek için derslerin video kayıtlarının yazılı dökümleri Toulmin'in (1958) argümantasyon modeli ile analiz edilmiştir. Kısaca belirtmek gerekirse, Toulmin'in modeline göre bir argüman iddia (claim) ile başlar ve sonrasında iddiayı destekleyen veri (data) üretilir. Veri ile iddia arasındaki ilişkiyi desteklemek amacıyla gerekçe (warrant) sunmak önemlidir. Bu gerekçeler matematiksel ilişkiler ve teoremler ile ilgili olabilir. Toulmin'in yaklaşımı doğrultusunda yapılan analizde, sınıf-içi tartışmalar iddia, veri ve gerekçe bileşenlerine göre kodlanmıştır. Bu kodlamalar üzerinden paylaşılan öğrenmeler ile ilgili karşılaşılan örüntüler ve ilişkiler not edilmiştir. Sınıf içi söylem ve argümantasyon süreci analiz edilirken kullanılan araç, model, iddia/gerekçe sunma, iddiaya karşı çıkma ve iddiayı destekleme/çürütme gibi boyutlar da incelenmiştir.

2.5. İnandırıcılık (Trustworthiness)

Bir çalışmanın inandırıcılığı geçerlik ve güvenirliğin sağlanması için yapılan çalışmalar ile ilgilidir (Patton, 2002). Tasarı tabanlı araştırmalarda ise inandırıcılık, yapılan çıkarımların ve ortaya konulan kanıtların savunulabilirliğine bağlıdır (Gravemeijer ve Cobb, 2006). Bu çalışmada orantısal akıl yürütmenin geliştirilmesine yönelik önerilen varsayıma dayalı öğrenme rotası kapsamında yapılan çıkarım ve ortaya konulan kanılar bu öğrenme rotası ile yapılan öğretimde ortaya çıkan sınıf içi tartışmanın deşifreleri (transcript) sunularak savunulmaktadır. Ayrıca, öğretim esnasında ortaya çıkan sınıf içi tartışmanın Toulmin argümantasyon modeli ile analiz edilmesiyle öğrencilerin anlamlı, kapsamlı ve sıralı öğrenmeleri ile ilgili kanıtlar ortaya konulmaktadır.

Tasarı tabanlı araştırmaların en güçlü yanlarından birisi uzun süreli etkileşim (prolonged engagement) ile ilgilidir (Gravemeijer ve Cobb, 2006). Bu çalışma kapsamında araştırmacılar üç sene boyunca önerilen öğrenme rotası ve etkinlik dizisinin uygulanması ve düzenlenmesi ile ilgilenmişlerdir. Bu sayede uzun süreli etkileşim sağlanırken aynı zamanda farklı döngülerde, farklı öğrencilerle öğrenme rotası ve etkinlik dizisine yönelik ortaya konulan kanıtların test edilmesiyle üçgenleme/çeşitleme (triangulation) ilkesi (Patton, 2002) de sağlanmıştır.

3. BULGULAR

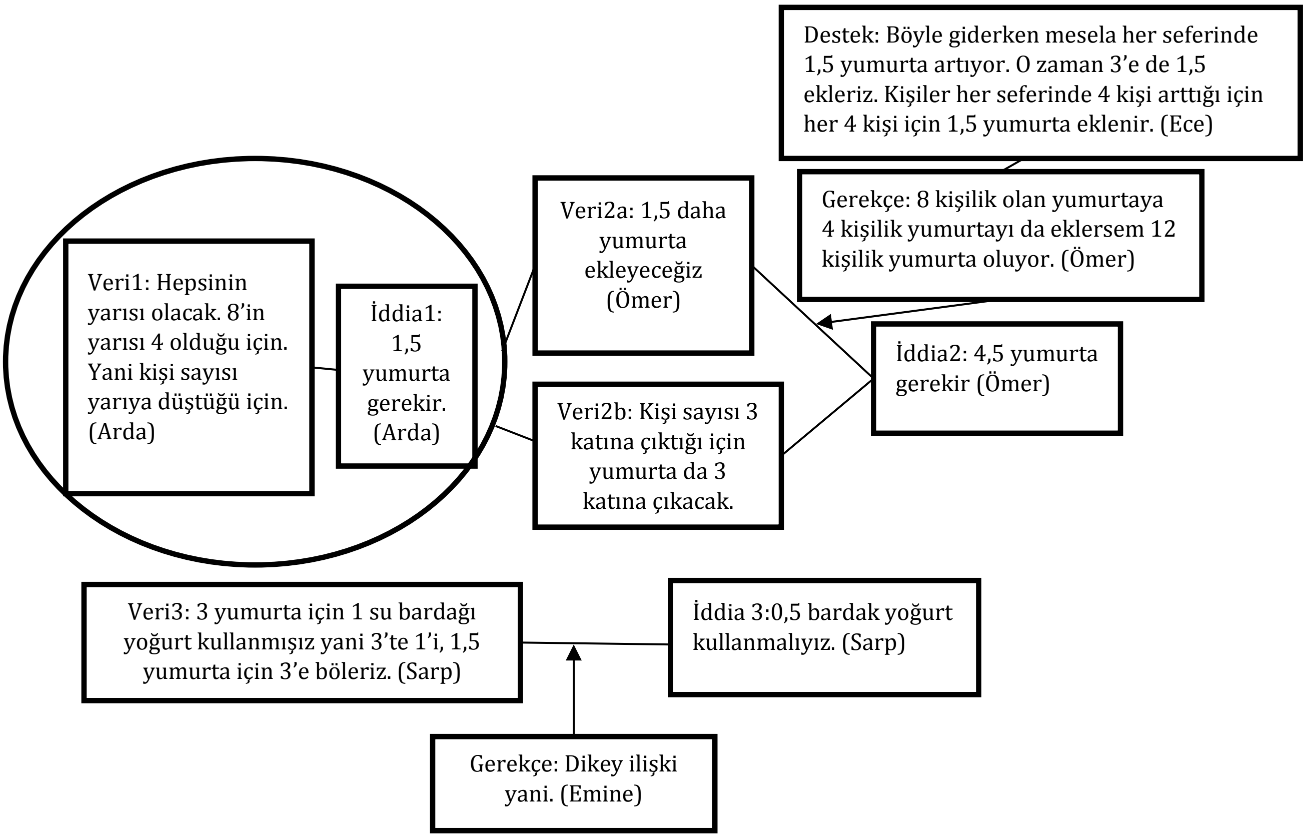
Bu çalışmanın amacı, orantısal akıl yürütmenin anahtar öğrenmelerine yönelik olarak geliştirilen bir sınıfa ait öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisinin test edilerek ve düzenlenerek son haline getirilmiş halinin ortaya konulmasıdır. Geliştirilen öğrenme rotası ve etkinlik dizisinin düzenlenmesi, son haline getirilmesi ve etkililiğinin ortaya konmasında sınıf içi öğretimin analiz sonuçlarından yararlanılmıştır. Bu bölümde, yöntem kısmında tasarı olarak anlatılan varsayıma dayalı öğrenme rotasının ve etkinlik dizisinin, çalışmanın son makro döngüsü kapsamında uygulanması sürecinde sınıf içerisinde nasıl gerçekleştiğine yer verilmiştir. Bu sayede ortaya konulan öğrenme rotası ve etkinlik dizisinin öğrencilerin öğrenmelerini desteklemek için sahip olduğu potansiyele yönelik kanıtlar ortaya konulmaktadır.

Uygulama öncesinde öngörüldüğü gibi, öğrenciler tablo üzerinde verilen kek tarifi bağlamında tablodaki yatay ve dikey ilişkileri birleşik birimleri yineleme (ör., artırma ve ölçeklendirme katsayısı ile kısaltılmış artırma stratejileri) ve çarpımsal düşünme (ör., birim oran stratejisi) ile ilişkilendirmişler ve bu ilişkileri temsil etmek için yatay ve dikey el hareketlerini kullanmışlardır. Bu çıkarıma örnek teşkil etmesi için, tarifte sekiz kişi için verilen yumurta ve yoğurt miktarından yola çıkarak dört ve 12 kişilik kek yapmak için gerekli olan yumurta ve un miktarlarına yönelik sınıf içi söylem aşağıda verilmiştir:

Öğretmen: 4 kişilik kek yapmak için ne yapacağız çocuklar?
Arda: Hepsinin (tüm malzemelerin) yarısı olacak. 8'in yarısı 4 olduğu için. Yani, kişi sayısı yarıya düştüğü için. O zaman 1,5 yumurta gerekir.
Öğretmen: 12 kişilik kek yapmak için kaç yumurta kullanmalıyız?
Ömer: (Tarifte verilen yumurta miktarına) 1,5 yumurta daha ekleyeceğiz, 4,5 yumurta oluyor.
Öğretmen: Neden 1,5 yumurta daha ekleyeceksin?
Ömer: Çünkü aynı miktarda hepsi, ona da 1,5 ekliyoruz. 8 kişilik olan yumurtaya 4 kişilik yumurtayı da eklersem 12 kişilik yumurta oluyor.
Ece: (Eliyle tabloda 4 kişilikten 8 kişiliğe, 8 kişilikten 12 kişiliğe yatay eğriler çizerek) Böyle giderken her seferinde 1,5 yumurta artıyor. O zaman 3'e 1,5 eklersek 4,5 olur.
Öğretmen: 10 kişi için sorsaydı aynı şekilde artar mıydı?
Ece: Hayır. Kişiler her seferinde 4 kişi arttığından her 4 kişi için 1,5 yumurta eklenir.
Öğretmen: (4 kişilikten 12 kişiliğe eliyle yatay eğriler çiziyor) 8 kişilik kek için kaç yumurta gerektiğini kullanmadan, 4 kişilik için kullanılan yumurtadan yola çıkarak, 12 kişilik kek için gerekli olan yumurtayı nasıl bulabiliriz?
Demir: 3 katı. Kişi sayısı 3 katına çıktığı için yumurta da 3 katına çıkacak.
Öğretmen: Peki, yoğurt miktarını bulalım.
Deren: 4 kişi için 0,5 su bardağı, 12 kişi için 1,5 su bardağı yoğurt lazım.

Öğretmen: Yumurta ile ilişkilendirebilir miyiz?
Sarp: 3 yumurta için 1 su bardağı yoğurt kullanmışız yani 3'te 1'i. 1,5 yumurta için 3'e böleriz 0,5 bardak yoğurt kullanmalıyız.
Emine: Dikey ilişki yani.

Yukarıda verilen diyalogdan anlaşıldığı gibi, ilk olarak Arda kişi sayıları arasında kısaltılmış artırma (azaltma) stratejisi kullanarak kişi sayısı yarıya düştüğü için malzemelerin de yarıya düşeceğini ve 4 kişi için 1,5 yumurta kullanılması gerektiğini iddia etmiştir. Bu, bağlı birleşik birimleri yineleme anahtar öğrenmesine yönelik bir veri-iddia ikilisidir. Ömer bu bilgiden yararlanarak 12 kişi için gerekli olan yumurta sayısını bulmak için 8 kişilik ve 4 kişilik yumurta miktarlarını toplayarak yine artırma stratejisi uygulamıştır. Elif bu stratejinin açıklamasını tablo üzerinde el hareketleri ile göstererek yapmış ve informel birim oran dilini kullanarak bu iddiaya gerekçe olarak her 4 kişi için 1,5 yumurta eklenmesi gerektiğini ortaya koymuştur. Öğrenciler 4 kişilik kek tarifi için gerekli yoğurt miktarını yine benzer stratejiler kullanarak bulduktan sonra öğretmenin yoğurt ve yumurta miktarları arasında ilişki kurmalarına yönelik isteğine karşılık Sarp bu çoklukları çarpımsal olarak ilişkilendirerek aralarındaki birim oran (ör., $\frac{1\ su\ bardağı\ un}{3\ yumurta}$) ilişkisine ve bu ilişkinin korunması gerektiğine vurgu yapmıştır. Bu diyaloğun Toulmin analizine göre şemalandırılmış hali yapılan analize örnek oluşturması için aşağıda verilmiştir:



Şekil 3. Kek tarifi bağlamında ortaya konulan sınıf içi söylemin Toulmin modeli ile analiz şeması

İkinci etkinliğin ikinci kısmının en temel amacının yanlış toplamsal düşünme biçiminin sınıf içi söylemde incelenmesi olduğu daha önceden belirtilmişti. Bu etkinliğin uygulanması sırasında da yukarıda bahsedilen stratejiler ve araçlar sınıf içi söylemde ortaya çıkmıştır. Bunlara ek olarak, hazırlık aşamasında öngörüldüğü gibi, öğrenciler soruda verilen öğrenci çözümlerini incelerken toplamsal ve çarpımsal düşünme biçimleri hakkında akıl yürütmüşler ve çarpımsal düşünme ile birim oran ilişkisine değinmişlerdir. Örneğin, ilk soruda (yanlış) toplamsal düşünme biçimi ile soruya cevap veren Yavuz ile çarpımsal düşünme biçimi ile soruya cevap veren Yeşim'den hangisinin cevabının doğru olduğuna yönelik sınıf içi söylem aşağıdaki diyalogda verilmiştir:

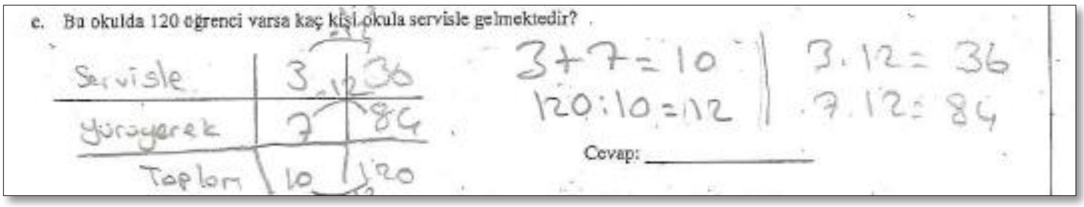
Öğretmen: Bir şeyin miktarını değiştirip tadını aynı yapabilirim değil mi?
Musa: Oran gerekiyor. Mesela, aynı tatta yapmamız için 6'yı 12, 4'ü de 8 yapmamız gerekiyor.
Mustafa: İkisi de aynı katına çıkmalı.
Merve: İkisini de aynı şeyle bölüp çarpmamız lazım.
Öğretmen: Burada Yavuz şöyle yapmış: Elma sayısı ile portakal sayısı 2 eksik dediği için 60'ın 2 eksiği 58 elma olmalı demiş. Yavuz'un düşüncesi doğru mudur?
Azize: Ben de önceden böyle düşünmüştüm ama yanlış olmuştu.
Öğretmen: Neden yanlış olmuştu peki?
Azize: Oran korunmamıştı.
Ece: Her 6 portakala karşılık 4 elma geldiği için her 3 portakala karşılık 2 elma karşılık gelmelidir. Burada öyle değil.

Öğretmen: O halde hangi öğrencinin cevabına katılıyorsunuz?
Azize: Yeşim.
Öğretmen: Neden peki? Tablo üzerinde gösterelim (bk. Şekil 4). Grup sayısı olarak düşünelim.
Umut: 60 tane portakal varsa yani 10 grup var böyle altılı altılı. Her bir grup için 4 elma denk geliyor. Dörtlü dörtlü 10 grup olmalı.

Yukarıdaki diyaloğun Toulmin analiz şeması verilmemiş; bunun yerine, bu diyalog Toulmin argümantasyon modeli ile açıklanmıştır. Buna göre, Musa hazırlanacak olan karışımın tadının verilen karışımla aynı olması için aradaki oranın korunması gerektiğini iddia etmiştir. Bu düşüncesini daha açıkça ifade etmek için 6 portakal ile 4 elmanın birbirine bağlandıktan sonra bu bağlı birleşiklerin 6-4, 12-8… şeklinde yinelenmesi gerektiğini savunmuştur. Mustafa ve Merve işlemsel olsa da yineleme işlemlerinin çoklukların katları alınarak yapılması gerektiğine yönelik iddialarda bulunmuşlardır. Öğretmen, soruda verilen Yavuz'un cevabının incelenmesini istediğinde ise Azize oranın bu şekilde korunmayacak olmasından dolayı doğru olmayacağını iddia etmiştir. Ece bu iddiayı açıklığa kavuşturmak için toplamsal düşünme biçimi uygulandığında her 6 portakala karşılık 4 elma, yani her 3 portakala karşılık 2 elma, denk gelmediği gerekçesini ortaya koymuştur. Yani, dolaylı olarak portakal sayısı ile elma sayısı arasındaki birim oranın her durumda korunması gerektiğine vurgu yapmıştır. Son olarak, aşağıda Şekil 4'te görüldüğü gibi, kısa oran tablosu üzerinde yatay oklar kullanarak portakal sayısının 10 katına çıkmasının altılı portakal gruplarından 10 tane olması anlamına geldiğini ve her bir altılı portakal grubu için dörtlü elma grubu olması gerektiğinden elma sayısının da 10 katına çıkması gerektiğini belirtmiştir.

Şekil 4. Kısa oran tablosu üzerinde kısaltılmış artırma stratejisinin uygulanması

Üçüncü etkinlik için ise öngörüldüğü gibi, öğrenciler okula servisle gelen her 3 öğrenciye karşılık 7 öğrencinin yürüdüğü bilgisi verildiğinde kısa tablo çizerek kısaltılmış artırma stratejisi ile okula servisle gelen öğrenci sayısı n katına çıktığı için okula yürüyerek gelen öğrenci sayısının da n katına çıkacağına yönelik gerekçeler sunmuşlardır. Tekrardan kaçınmak için bu örneklere yer verilmemiştir; fakat, aşağıdaki şekilde sınıftaki toplam öğrenci sayısı verildiğinde bu bilginin nasıl kullanıldığına ve parça ile bütün arasında kurulan ilişkilere yönelik çözümler ve sonrasında ise sınıf içi söylemde ortaya konulan matematiksel fikirlere yer verilmiştir.



Şekil 5. Kısa oran tablosu üzerinde parça-bütün ilişkisine yönelik gösterimler

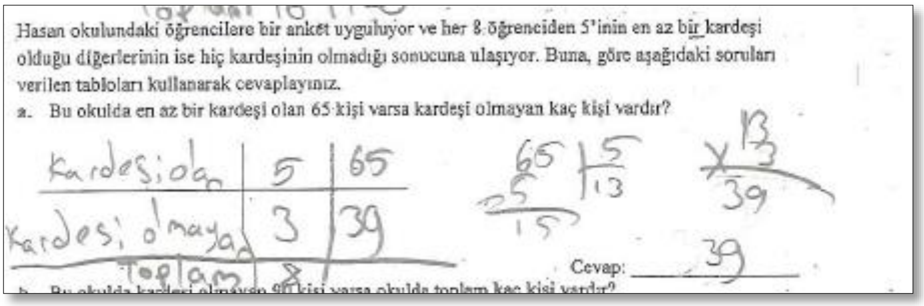
Yukarıda Şekil 5'te öğrencinin 3 ve 7'yi topladıktan sonra toplam öğrenci sayısına karşılık gelecek sayının neden 10 olduğuna yönelik açıklaması verilirken ilgili grup çalışması sırasında öğretmen ve öğrenciler arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

Yasin: Toplamı sorduğu için ben 7 ile 3'ü topladım, 10 buldum.
Öğretmen: Neden 7 ile 3'ü topladın?
Yasin: Toplam 120 öğrenci var dediği için.
Öğretmen: Nasıl bir mantık yürüttün? Topladığın sayıların 120 ile nasıl bir ilişkisi var?
(Öğrenci cevap veremiyor, öğretmen başka öğrenciye aynı soruyu yöneltiyor.)
Duygu: Servisle gelenler ve yürüyerek gelenlerin toplamı 120 oluyor, tüm öğrenciler. En basit genelleme yaptığımız ifadede (okula servisle gelen) 3 kişiye karşılık (okula yürüyerek gelen) 7 kişi oluyor. O zaman toplam 10 kişi oluyor.
Öğretmen: Tabloda nereye yazacaksın bu sayıyı?
Duygu: Yeni bir hane açarım tabloda. Toplam yazıp 10 yazdım. 10'dan 120 olmuş sonra bu toplam (Tabloda en alt satırda yatay oklar çiziyor). 120'yi 10'a böleriz. 12 buldum.
Öğretmen: Ne o bulduğun 12?
Duygu: Yineleme sayısı. O zaman diğerleri de 12 katına çıkacak.

Berra: Yürüyerek gidenleri de o zaman 12 ile çarparım. 7×12 = 84 kişi yürüyerek gidiyor. 3×12=36 kişi servisle gidiyor.
Öğretmen: Nasıl kontrol edebilirsiniz cevaplarınızı?
Ceren: 36 ile 84'ü topladığımda 120 oluyor. Yani servisle gelenlerle yürüyerek gelenleri topladığımda tüm öğrencileri buluyoruz.

Yukarıdaki diyalogdan anlaşılacağı üzere, öğrenciler 7 ile 3'ü topladıktan sonra toplamı temsil edecek sayıyı 10 bularak tabloda doğru haneye yerleştirseler de 7 ile 3'ü neden topladıklarına ve topladıklarında elde ettikleri 10'un neden toplam öğrenci sayısını ifade edeceğine yönelik gerekçeler sunmakta yetersiz kalmışlardır. Bu sebepten dolayı, öngörüldüğü şekilde ikinci soruda parça-bütün arasında verilen informel oran dili kullanımının yer aldığı soruyla sınıf tartışmasına devam edilmiştir.

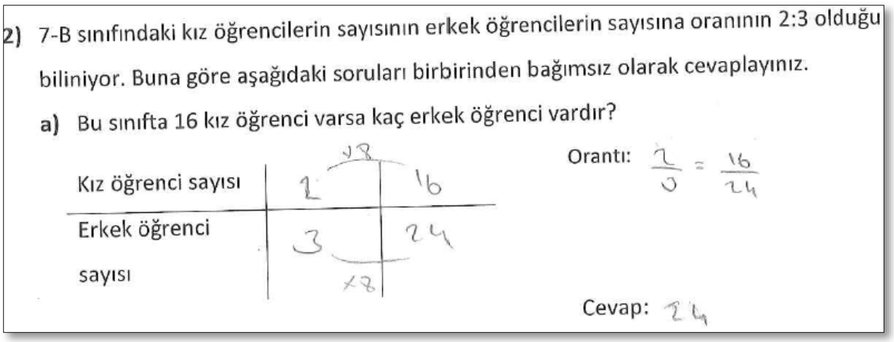
Öğretmen: 2. Soruda nasıl tablo yaptınız?
Merve: Kardeşi olan ve olmayan diye tablo yaptık. Kardeşi olana 5, olmayana 3 yazdık.
Öğretmen: Soruda 8 kişiden 5'inin kardeşi var diyor. Tabloya neden 8 değil de 3 yazdınız?
Merve: Çünkü her 8 kişiden 5'inin kardeşi varmış. O zaman kalan 3 kişinin kardeşi yoktur.
Öğretmen: Bir de toplam hanesi açalım biz tablonun en altına.
Merve: Toplama 8 yazmalıyız. Soruda "en az bir kardeşi olan 65 kişi var" dediği için 5'in yanına 65 yazmalıyız. 65'i 5'e böleriz yatay değişimi bulmak için. 65:5= 13 olduğu için 13 katına çıkmış. O zaman kardeşi olmayanlar da 13 katına çıkacak. 13×3= 39 olur.



Şekil 6. Kısa oran tablosu üzerinde parça-bütün ilişkilerine yönelik gösterimler

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü gibi, öğrenciler ilk soruda parça-bütün ilişkisini informel dil kullanarak (ör., her 10 kişiden 7'si okula yürüyerek 3'ü servisle geliyor) ifade edememişler bunun yerine bütün yerine "toplam" terimini kullanmışlardır. İkinci soruda ise, informel olarak verilen parça-bütün ilişkisini ilk soruda kullandıkları toplam terimiyle bağdaştırarak verilen bilgiyi doğru biçimde anlamlandırmışlardır.

Etkinlik 3'ün sonuna kadar formel olarak tanıtılmayan oran ve orantı kavramları ve sembolik gösterimlerine geçiş için hazırlanan dördüncü etkinlik kapsamında, bir sınıftaki kız-erkek öğrenci sayıları bağlamında, öğrencilerin sahip olduğu denk kesirler ve oranların eşitliği kavrayışlarından yola çıkarak formel oran ve orantı gösterimlerine geçiş yapılmıştır. Bu süreç GME'ye uygun olarak ve planlanan şekilde öğrencilere verilen ve verilmeyen çoklukların organize edilmesi için tanıtılan ve öğrencilerin ilk üç etkinlik boyunca yaklaşık olarak 8-10 ders saati süresince kullandıkları kısa oran tablolarının kenarlıklarının kaldırılması yoluyla sembolik orantı gösterimine (ör., $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$) geçiş yapılması ile olmuştur. Aşağıda Şekil 7'de, kısa tabloların kenarlıklarının kaldırılarak oran ve orantının formel olarak uygulanmasına yönelik erkek öğrenci sayısı ile kız öğrenci sayıları arasındaki ilişkinin aynı kaldığı farklı durumlardaki oranlarının eşitliğinin anlamlandırılmasına yönelik gösterimlerden bir örnek verilmiştir.



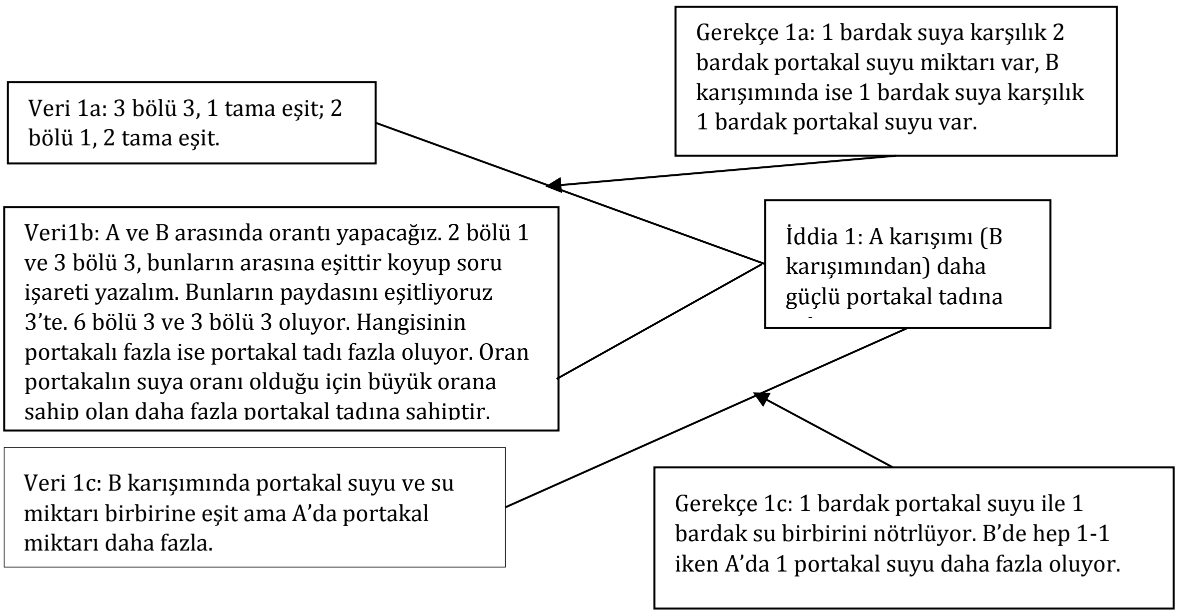
Şekil 7. Kısa oran tablolarının kenarlıklarının kaldırılarak oran ve orantının sembolik gösterimine geçiş

Yukarıda Şekil 7'de verilen soruyu çözerken bir öğrenci sembolik orantı gösterimini tahtada yazdıktan sonra, öğretmen ve öğrenciler birlikte kesir-oran ilişkisini kurabilmişlerdir. Sınıf içi söylemde öğrencilerin daha önceden var olan kesirlerin denkliği ve denk kesirler oluşturmaya yönelik deneyimlerinden yola çıkılarak oranların eşitliği ve eşit oranlar oluşturmaya geçiş yapılmıştır. Eşit oranlar oluşturulurken kısa tablolarda daha önceden incelenen dikey ve yatay ilişkilere de değinilmiştir.

Etkinliğin sonlarına doğru ise yine kız öğrenci sayısının erkek öğrenci sayısına oranının 2:3 olduğu, bağlamda farklı oranlar verilerek bu oranların bu sınıftaki kız sayısının erkek sayısına oranı olup olamayacağını incelemeleri istenmiştir. Burada amaç oranların kıyaslanmasına geçiş sürecini desteklemektir.

Etkinlik 5 kapsamında, öngörüldüğü üzere, öğrenciler iki oranın eşit olup olmadığını incelemenin yanı sıra, verilen portakal suyu ve su karışımı bağlamında hangi oranın daha büyük/küçük olduğuna yönelik çıkarımlarda bulunmuşlardır. Bu çıkarımlar için, amaçlanan doğrultuda, öğrencilerin birçok strateji kullandıkları görülmüştür. Bu stratejilerden ilki, portakal suyu veya su miktarlarının birbirine eşit olduğu durumda karışımlarda farklı miktarlarda bulunan diğer bileşenin miktarlarının kıyaslanmasıdır. Bu strateji kullanımı, herhangi bir bileşenin eşit olmadığı durumlarda bileşenlerden birinin her iki karışımda eşit miktarda olacak şekilde karışımdaki portakal suyu ve su miktarlarının yinelenerek aynı tada sahip başka bir karışım elde ederek kıyaslanması şeklinde de tartışmada yer almıştır. İki karışımdan daha güçlü portakal tadına sahip olanı belirlemek için aynı miktarlarda su içeren karışımlardan daha fazla portakal suyu içeren karışımın daha güçlü portakal tadına sahip olacağı gerekçesi kullanılmıştır. Bunun yanı sıra, sınıf tartışmasında portakal suyu miktarlarının eşitlendiğinde su miktarının az olduğu durumlarda portakal suyu tadının daha az olacağına yönelik iddialar ortaya konulmuştur.

Farklı düşünüş biçimleri sorulduğunda öğrenciler farklı strateji kullanımları ortaya koymuşlardır. Aynı işlemlerin anlamlandırılmasını yaparken öğrenciler birim su bardağına düşen portakal suyu miktarına değinerek birim oran kavramına bu bağlamda da değinmişlerdir. Aşağıdaki Toulmin analizinde, A (2 bardak portakal suyu-1 bardak su) ve B (3 bardak portakal suyu-3 bardak su) sürahilerindeki karışımları kıyaslarken karışımlardaki su miktarlarının eşitlenerek portakal suyu miktarlarını karşılaştırmanın her iki karışımdaki portakal tatlarının kıyaslanmasına ve birim oranın anlamlandırılmasına yönelik bir sınıf içi söylemin Toulmin argümantasyon şeması ile analizi örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 8. Oranların kıyaslanması anahtar öğrenmesine yönelik sınıf içi söylemin Toulmin analiz şeması

Yukarıdaki öğrenci cevabından ve Toulmin analizi şemasından anlaşılacağı üzere, ilk olarak bir öğrenci her iki karışımdaki portakal suyu ve su miktarları arasında oran kurarak bu oranların kıyaslamasını yaparken kesirlerde sıralama stratejilerinden faydalanarak A karışımının daha fazla portakal tadına sahip olacağı iddiasında bulunmuştur. Bu düşünme biçimi için gerekçe sorulduğunda ise bir bardak suya karşılık gelen portakal suyu miktarına değinerek karışımların tatlarının kıyaslanması bağlamında birim oranı anlamlandırmıştır. Alternatif çözüm yolu olarak ise diğer bir öğrenci her iki karışımdaki portakal suyu miktarlarının su miktarlarına oranlarını yazarak ve kesirlerde yapılan payda eşitleme stratejisinden faydalanarak su miktarlarının eşitlendiği durumda büyük olan orana sahip karışımın daha fazla portakal tadına sahip olacağı verisinden yola çıkmıştır. Diğer bir çözüm yolu olarak iki karışımdaki portakal suyu ve su miktarı arasındaki ilişkiye değinilmiş ve B karışımında birbirine eşit olan portakal suyu ve su miktarlarına karşılık A karışımında portakal suyu miktarının su miktarından fazla olduğuna vurgu yapılmıştır. Öğrenciye portakal suyu ve su miktarı arasındaki ilişkilere toplamsal ya da çarpımsal olarak odaklandığının belirlenmesi için gerekçesi sorulduğunda ise her iki karışımda 1 bardak portakal suyu ile 1 bardak suyu eşleyerek ve bunların birbirini nötrleştireceği *metaforundan* yola çıkarak A karışımında eşlenmeyen 1 bardak portakal suyunun A karışımının portakal tadını daha güçlü yapacağını savunmuştur. Bu düşünme biçimi bu karışım için geçerli olmakla birlikte portakal suyu miktarı ile su miktarı aralarındaki farkın eşit olduğu iki karışımın (ör., 3 bardak portakal suyu ve 4 bardak su içeren bir karışım ile 5 bardak portakal suyu ve 6 bardak su) kıyaslanmasında geçerli olmayacağı için çarpımsal düşünme becerisinin geliştiğini tam olarak göstermeyen bir strateji olarak nitelendirilmiştir. Ancak, bir bardak suya düşen portakal suyu miktarına odaklanılan birim oran stratejisi her koşuldaki kıyaslamaya uyarlanabileceğinden bu strateji çarpımsal düşünmenin ana stratejilerinden biri olarak kabul edilebilir. Etkinliğin devamındaki örneklerde ise portakal tadının daha yoğun olduğu karışım belirlenirken pay veya paydanın eşitlendiği diğer bir deyişle bir çokluğun sabitlendiği durumlara da yer verilmiştir.

Böylelikle, iki oranın kıyaslanmasını içeren durumlarda öğrencilerin bağlam içerisinde oranları anlamlandırarak kıyaslayabildikleri ve bu kıyaslamalarını da bağlam içerisinde yorumlayabildikleri görülmüştür.

Sonuç olarak, öğrenciler balık ve yem bağlamı içerisinde başladıkları birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme anahtar öğrenmelerinden yola çıkarak farklı bağlamlar içerisinde ve informel araçlardan formel araçlara geçiş yaparak oran ve orantı kavramlarını anlamlandırmışlar ve son olarak sembolik gösterimlerine geçiş yapmışlardır. Sonraki süreçte öğrenciler farklı oranları bağlamlar içerisinde kıyaslayarak ilk önce orantılı olup olmadıklarına karar verdikten sonra hangi oranın küçük/büyük olduğu ile ilgili muhakemeler yapmışlardır. Sayfa sayısını daha fazla arttıracağından dolayı sınıf içerisinde uygulanan tüm etkinliklere yer verilememiştir. Aynı sebepten, bu çalışmada yer verilen etkinliklerle ilgili sınıf içi söylemde yer alan fikirlerin hepsine yer verilememiş birkaç örnekle tasarlanan öğretim ve uygulaması açıklanmıştır. Çarpımsal düşünme anahtar öğrenmesini geliştirmek için hazırlanan üçüncü ve dördüncü etkinliklere yönelik anahtar öğrenme, araç/imgeler, sınıf içi matematiksel söylemler ve kullanılan jest/metaforlar içeren örnek öğrenme rotası tablosu Ek 1'de verilmiştir. Ayrıca verilen örnek öğrenme rotasının daha açık hale getirilmesi için uygulanan üçüncü etkinlik Ek 2'de verilmiştir.

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın amacı 7. sınıf öğrencilerine oran ve orantı konusunun en anlamlı, kapsamlı ve sıralı bir şekilde öğretilmesine yönelik GME temelli bir sınıfa ait varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisinin geliştirilmesi, test edilmesi ve düzenlenerek son haline getirilmesidir. Çalışmanın sonuçlarına göre öğrenciler balık-yem bağlamı içerisinde informel araçları (ör. balık ve yem resimleri, gruplama için yuvarlak içine alma ve oklar kullanarak birleşik birimleri bağlama vb.) kullanarak süreç içerisinde daha formel modellere (uzun oran tabloları) geçiş yapabilmişlerdir. Sonraki süreçte ise, bağlı birleşik birimlerin kendi içerisinde tekrarlı toplamaya dayalı olarak yinelenmesinin kısa yolu olarak kısaltılmış artırma stratejisini keşfetmişlerdir. Benzer şekilde, uzun tablolar yerine kısaltılmış artırma stratejisinin sembolik gösterimi olarak kısaltılmış oran tablolarına geçiş yapmışlardır. Bu şekilde tablodaki yatay ilişkiler (ör. $\times$ 10) ile informel araçlarla (gruplandırma, grupları birbirine bağlayarak yineleme) yapılandırdıkları süreçleri bağdaştırmışlardır (bk. Ayan-Civak, 2020). Bu bulgular, bu çalışma kapsamında detaylı olarak ele alınmayıp bu çalışmanın bulguları için ön koşul temsil ettiğinden özet halinde sunulmuştur. Bu çalışma kapsamında, ortaya konulan etkinliklerle öğrencilerin balık-yem bağlamında keşfettikleri stratejileri ve ilişkileri farklı bağlamlarda pekiştirmeleri, tablolarda dikey ilişkilere odaklanarak bu ilişkileri birim oran ile ilişkilendirmeleri ve kısa tablolardan orantının sembolik gösterimine geçiş süreçleri ortaya konmuştur. Son olarak, tüm bu öğrenmelerin oranların kıyaslanması anahtar öğrenmesinin geliştirilmesine yönelik olarak hazırlanan beşinci etkinlikte uygulanması anlatılarak geliştirilen öğrenme rotası ve etkinlik dizisinin sınıf içerisindeki yansımalarına yer verilmiştir.

Çalışmanın bulgularına göre, oran ve orantı konusunun temeli olan birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme anahtar öğrenmelerinin, balık-yem bağlamında, bahsedilen informel ve formel araçlar kullanılarak öğretilmesi ve bu ilişkilerin diğer bağlamlarda da incelenerek anlamlandırılmasının öğrencilerin bu konuyu anlamlı, kapsamlı ve sıralı olarak öğrenmeleri için önemli potansiyele sahip olduğu sonucuna varılmıştır. Bu sonucu desteklemek için öğrencilerin sınıf içi tartışmalarının Toulmin argümantasyon modeli ile analiz sonuçları kanıt olarak sunulabilir. Öğrenciler bu bağlamlardaki sorulara cevap vermek için doğru iddialarda bulunmuş ve bu iddialarını bağlam ile ilişkilendirilmiş matematiksel fikirler sunarak gerekçelendirebilmişlerdir. Bu gerekçelerin temelinde, çoklukların birbirine bağlanarak yinelenmesi ve bu yinelemelerin tablolarda ve orantı gösteriminde yatay ilişkilerle ilişkilendirilmesi vardır. Bunun yanı sıra, farklı bağlamlarda verilen çoklukların kendi aralarındaki değişmez ilişkinin (ör., her 2 kız öğrenciye karşılık 3 erkek öğrenci, her 3 yumurta için 1 su bardağı yoğurt vb.) sayılar değişse bile aynı kaldığı keşfedilmiş, bu ilişki tablolar ve orantı gösteriminde dikey ilişki olarak adlandırılmış ve birim oran kavramı ile ilişkilendirilmiştir. Bu yatay ve dikey ilişkiler aynı zamanda Lamon'un (1994) bahsettiği birimleme ve biçimlendirme ilişkileridir. Buradan yola çıkarak, orantısal akıl yürütmenin temelinin birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme (Battista ve Borrow, 1995; Steffe 1994) ve Lamon'un (1994) isimlendirdiği birimleme ve biçimlendirme ilişkilerinin kazanılmasından geçtiği sonucuna varılabilir. Mevcut çalışmada, öğrenciler diğer tüm anahtar öğrenmeleri bu anahtar öğrenmeler üzerine inşa edebilmiş ve her derste bu anahtar öğrenmeleri kullanarak gerekçeler ortaya koyabilmişlerdir.

Diğer yandan, birçok çalışmada rapor edilen oran ve orantı konusunda öğrencilerin yaşadıkları zorluklar ve hatalar bu çalışma kapsamında sınıf içerisinde çoğunlukla ortaya çıkmamıştır. Örneğin, orantısal akıl yürütme ile ilgili en yaygın zorluk olarak bahsedilen yanlış toplamsal düşünme biçimi (Atabaş ve Öner, 2017; Ben-Chaim ve diğerleri, 1998; Duatepe ve diğerleri, 2005; Hart, 1988; Kahraman ve diğerleri, 2019; Kaplan ve diğerleri, 2011; Kaput ve West, 1994; Karplus ve diğerleri, 1983; Mersin, 2018; Misailidou ve Williams, 2003; Noelting, 1980, Piaget ve Inhelder, 1975; Resnick ve Singer, 1993; Tourniaire ve Pulos, 1985, van Dooren ve diğerleri, 2010) sınıf içerisindeki tartışmada kendiliğinden ortaya çıkmamıştır. Ancak, birçok etkinlikte kurgusal olarak yanlış toplamsal düşünme biçimi uygulayan öğrencilerin cevapları tartıştırılarak öğrencilerin toplamsal düşünme biçiminin birleşik birimler arasındaki bağın korunmasını sağlamadığı sonucuna varmaları sağlanmıştır. Buradan yola çıkarak çarpımsal düşünmenin temelinin tekrarlı toplamadan ziyade birleşik birimler oluşturma, birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme üzerine kurulmasıyla ve yanlış toplamsal düşünme biçiminin sınıf içerisinde açıkça tartışılması yoluyla yanlış toplamsal düşünme biçiminin engellenebileceği savunulmaktadır. Buna ek olarak, oran ve orantı ile ilgili formel bilgilerin ortaya konulan öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisi kapsamında öğrencilerin birleşik birimleri bağlama, bağlı birleşik birimleri yineleme, birimleme, biçimlendirme gibi informel bilgilerinden yola çıkarak ve oran tablolarında yatay ve dikey ilişkilerin anlamlandırılması yoluyla kazandırılmasıyla öğrencilerin bu konuyu anlamlı, kapsamlı ve sıralı olarak öğrenmesinin sağlanabileceği ve alanyazında bahsedilen birçok zorluğun önüne geçilebileceği savunulmaktadır. Ayrıca, çalışmanın sonuçlarına göre yedinci sınıf öğrencilerinin içler-dışlar çarpımı gibi işlemsel algoritmalara ihtiyaç duymadan orantısal akıl yürütme ile ilgili birçok problem hakkında akıl yürütebilecekleri söylenebilir. Dolayısıyla, öğretimsel materyallerde ve sınıf içi öğretimde, işlemsel algoritmalar yerine gerçekçi bağlamlarda aynı birimli çokluklar arasındaki bağlı birleşik birimleri yineleme, birimleme ve biçimlendirme ile farklı birimli çokluklar arasındaki değişmez fonksiyonel ilişkilere odaklanılması önerilmektedir.

Diğer yandan, çalışmanın sonuçları yukarıda bahsedilen ilişkilerin öğrenilmesinin ve GME Teorisi temel alınarak uzun ve kısa oran tablolarının kullanılmasının ve bu araçların süreç içerisinde oran ve orantının sembolik gösterimine temel oluşturacak modeller olarak gösterilmesinin, öğrencilerin informel bilgiden formel bilgiye geçişlerini desteklemede etkili olduğunu göstermiştir. Bunun yanı sıra, bu ilişkileri temsil etmek için yatay ve dikey el hareketlerinin (jest) kullanılmasının da öğrenmeyi desteklediği sonucuna varılmıştır. Buradan yola çıkarak bu çalışmanın sonuçları, modellerin öğrenmeyi desteklediği ve öğrenmenin model kullanımıyla birlikte ve iç içe geliştiğini savunan çalışmaların (Gravemeijer, 1999; Gravemeijer ve Doorman, 1999) sonuçlarını destekler niteliktedir. Benzer şekilde, çalışmanın sonuçları jest kullanımının öğrenmeyi desteklemede etkili olduğunu savunan çalışmaların (Gravemeijer ve diğerleri, 2003; Stephan, 2015) sonuçları ile benzerlik göstermektedir.

Alanyazında birçok konuda varsayıma dayalı öğrenme rotalarına ulaşmak mümkündür. Bunların çoğu bireysel gelişime odaklanmaktadır. Diğer yandan, ulusal ve uluslararası alanyazında oran ve orantı konularına yönelik birçok kavram yanılgısı ve stratejiden bahsedilmesine rağmen orantısal akıl yürütmenin sınıf içerisinde gelişimine yönelik öğrenme rotası geliştirmeyi hedefleyen çalışmalar sınırlı sayıdadır. Bu kapsamda, bir sınıfta orantısal akıl yürütmenin hangi rotada gerçekleştiğinin ve bu öngörülen rotanın hangi etkinlik ve araçlarla desteklenebileceğinin ortaya koyulduğu tek çalışma Amerikalı araştırmacılar Stephan ve arkadaşları (n.d.) tarafından yürütülen çalışmadır. Mevcut çalışmada geliştirilen öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisi, belirtilen öğrenme rotası temel alınarak geliştirilmiş olsa da orijinal çalışmaya birçok düzenleme ve ekleme yapılmıştır. Örneğin, orijinal çalışmada bulunan ilk dört anahtar öğrenmeye yönelik yeni etkinlikler geliştirilerek öğrenme rotasının kapsamı arttırılmıştır. Bu bağlamda, hazırlanan öğrenme rotası ve etkinlik dizisinin, oran ve orantı konusunun öğretiminin kalitesini ve sonuç olarak öğrenci başarısını arttıracak potansiyele sahip olduğu düşünülmektedir.

Bu çalışma kapsamında öğrencilerin kazandıkları anahtar öğrenmeleri matematikteki ve/veya diğer derslerdeki anahtar öğrenmelere ulaşmak için kullanıp kullanamayacaklarına yönelik bir çıkarımda bulunmak amacıyla bir veri toplanmamıştır. Özellikle, oran ve orantı konusunun matematik, fen ve günlük hayattaki birçok durumun temelinde yattığı düşünüldüğünde bu yönde ileride yapılacak bir araştırmanın sonuçları büyük önem taşımaktadır. Buna ek olarak, bu yönde yapılacak bir çalışmanın sonuçları, geliştirilen öğrenme rotası ve etkinlik dizisi boyunca edinilen öğrenmelere yönelik yatay matematikleştirmenin gerçekleşip gerçekleşmediğini ortaya koymak için de önemlidir.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Bu çalışma 217K430 numaralı TÜBİTAK projesi kapsamında gerçekleştirilmiş olup ilgili kurumlardan gerekli resmi izinler alınmıştır. Araştırma süresince araştırma ve yayın etiği ilkelerine bağlı kalındığı tüm yazarlar tarafından beyan edilmektedir.

Yazarların Makaleye Katkı Oranları

Bu çalışma, Yazar 2 yürütücülüğündeki ve Yazar 3'ün araştırmacı olarak yer aldığı TÜBİTAK projesi kapsamında gerçekleştirilmiş olup aynı projede bursiyer olarak görev alan Yazar 1'in doktora tezi çalışmalarının devamı niteliğindedir. Birinci ve ikinci yazarlar birlikte sunulan fikirleri ve tasarı öğretimi geliştirerek çalışmanın alt yapısını oluşturmuşlardır. Üçüncü yazar veri toplama sürecinde ve proje sonuçlarının makaleye dönüştürülmesinde katkı sunmuştur.

Destek Beyanı

Bu çalışma 217K430 numaralı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) projesinden üretilmiştir.

Teşekkür

Yazarlar, proje ve doktora tezi kapsamında çalışmayı destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkürlerini sunmaktadırlar. Ayrıca, yazarlar çalışmada tasarı ekibinin bir parçası olan ve öğrencileri ile katılımcı olan ortaokul matematik öğretmenine de teşekkürlerini sunmaktadır.

Çıkar Beyanı

Yazarlar arasında çıkar çatışması bulunmadığı tüm yazarlar tarafından beyan edilmektedir.

5. KAYNAKÇA

Atabaş, Ş., & Öner, D. (2017). An examination of Turkish middle school students' proportional reasoning. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, *33*(1), 63–85.

Ayan, R. & Işıksal-Bostan, M. (2018). Middle school students' reasoning in nonlinear proportional problems in geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(3), 503–518.

Ayan-Civak, R. (2020). *The evolution of mathematical practices in a seventh grade classroom: Analyzing students' development of proportional reasoning* (Unpublished Doctoral Dissertation). Middle East Technical University, Turkey.

Battista, M. T. & Borrow, C. V. A. (1995). *A proposed constructive itinerary from iterating composite units to ratio and proportion concepts.* Paper presented at the Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Columbus, OH.

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(3), 247–273.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81–89.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13.

Confrey, J., Maloney, A. P., & Corley, A. K. (2014). Learning trajectories: A framework for connecting standards with curriculum. *ZDM, 46*(5), 719–733.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Making connections: A case for proportionality. *Arithmetic Teacher, 60*(6), 342–346.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*(1), 65–83.

Dole, S. (2008). Ratio tables to promote proportional reasonings in the primary classroom. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *13*(2), 18–22.

Duatepe, A., Akkuş-Çıkla, O. & Kayhan, M. (2005). Orantısal akıl yürütme gerektiren sorularda öğrencilerin kullandıkları çözüm stratejilerinin soru türlerine göre değişiminin incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 28*, 73–81.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from the learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 29–63). London: Routledge.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 111-129.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K., Bowers, J., & Stephan, M. (2003). A hypothetical learning trajectory on measurement and flexible arithmetic. In N. Pate-man (Series Ed.), M. Stephan, J. Bowers, & P. Cobb (with K. Gravemeijer) (Vol. Eds.), *Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series: Vol. 12*. Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context (pp. 51–66). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemejier, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155–177.

Harel, G., & Behr, M. (1995). Teachers' solutions for multiplicative problems. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 3*, 31–51.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 198–219). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Jitendra A. K., Star, J.R., Starosta, K., Leh, J. M., Sood, S., Caskie, G., et al. (2009). Improving seventh grade students' learning of ratio and proportion: The role of schema-based instruction. *Contemporary Educational Psychology, 34,* 250–264.

Kahraman, H., Kul, E. & İskenderoğlu, T. A. (2019). 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin nicel karşılaştırma içeren orantısal akıl yürütme problemlerinde kullandıkları stratejiler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *10*(1), 195–216.

Kaplan, A., İşleyen, T. & Öztürk, M. (2011). 6. sınıf oran orantı konusundaki kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 19*(3), 953–968.

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional problems: factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey, (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235–287). Albany: State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 219–233.

Kenney, P. A., Lindquist, M. M., & Heffernan, C. L. (2002). Butterflies and caterpillars: Multiplicative and proportional reasoning in the early grades. In B.Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 87–99). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey, (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany: State University of New York Press.

Lamon, S. J. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 167-198). Albany: State University of New York Press.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93–118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Lobato, J., & Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio as measure as a foundation for slope. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 162–175). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mersin, N. (2018). İki aşamalı teşhis testine göre ortaokul 5, 6 ve 7. sınıf öğrencilerinin orantısal akıl yürütmelerinin değerlendirilmesi. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, *7*(4), 319–348.

Middleton, J. A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (1995). The ratio table. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *1*(4), 282–288.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar)*. Ankara: MEB.

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 335–368.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I–Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(2), 217–253.

Özdemir, A. Ş., Yıldız, F., & Göktepe-Yıldız, S. (2015). The effect of project-based learning in "ratio, proportion and percentage" unit on mathematics success and attitude. *European Journal of Science and Mathematics Education, 3*(1). 1–13.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of idea of chance in children*. New York, NY: Norton.

Resnick, L. B., & Singer, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 107–130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114–145.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics, 43,* 271–292.

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. (pp. 3-39). Albany, NY: SUNY Press.

Stephan, M. L. (2015). Conducting classroom design research with teachers, *ZDM, 47*(6), 905–917.

Stephan, M., McManus, G., Smith, J. & Dickey (n.d.). *Ratio and rates*. [Available online at: https://cstem.uncc.edu/sites/cstem.uncc.edu/files/media/Ratio%20T%20Manual.pdf], Retrieved on May 12, 2018.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long termlearning process (towards... a theory) Part I: Reflections on a teaching experiment. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(4), 327–348.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long termlearning process (towards... a theory). Part II: The outline of the long termlearning process. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(1), 75–94.

Thompson, P. W. & Saldanha, L. A. (2003) Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.), *Research companion to the Principles and Standards for school mathematics* (pp. 95–113). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Toluk-Uçar, Z. & Bozkuş F. (2016). İlkokul ve ortaokul öğrencilerinin orantısal durumları orantısal olmayan durumlardan ayırt edebilme becerileri. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi (KEFAD), 17*(3), 281–299.

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181–204.

van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, 28*, 360–381.

6. EXTENDED ABSTRACT

The concepts of ratio and proportion, which form the basis for proportional reasoning, are essential to understand many situations in mathematics, science, and daily life. On the other hand, when the research on ratio, proportion, and proportional reasoning is examined, it is seen that those are one of the most difficult topics for students, and students have various misconceptions about these topics. Experimental studies were also conducted to investigate students' learning of ratio and proportion, which showed that the instruction had significant impact on students' learning of those topics and concepts. Therefore, it is essential to propose local instruction theories to improve the teaching and learning of ratio, proportion, and proportional reasoning.

The purpose of this study is to develop, test, and revise a hypothetical learning trajectory (HLT) and related instructional sequence for teaching proportional reasoning in meaningful, comprehensive, and coherent ways in seventh grade. The term HLT in this study is used as a synonym for classroom learning trajectory, which is composed of big ideas, tools/imageries, taken-as-shared activities, possible mathematical discourse, and possible gesturing and metaphors. The instructional design theory of this study is Realistic Mathematics Education (RME). The design principles of didactical phenomenology, emergent models, and guided reinvention were followed in the development, testing, and revision process of the HLT and the instructional sequence.

As part of a three-year design-based research project, this study was conducted in line with the three phases of design-based research. In the preparation phase, a classroom HLT including big ideas, tools/imageries, taken-as-shared activities, possible mathematical discourse, and possible gesturing and metaphors; and related instructional sequence were developed based on the related literature and anticipatory thought experiments in order to support a classroom community's learning of proportional reasoning in meaningful, comprehensive, and coherent ways. Based on an extensive literature review and the mutual work within the design team, the big ideas of proportional reasoning were determined as linking composite units, iterating linked composites, multiplicative reasoning, structuring ratios and proportions symbolically and comparing ratios/rates. In order to support the learning of those big ideas, an instructional sequence including five activities (Let's feed the fish, Let's make a cake and fruit juice with recipes, Let's read the survey results, Learning ratio and proportion, Comparing oranginess) was developed. In the development and design process of the HLT and the instructional sequence, the HLT and the instructional sequence by Stephan et al. (n.d.) were taken as the starting point. Throughout three years of implementations, many revisions and adaptations were made to the original versions. Besides, the literature on students' informal ideas regarding proportional reasoning was used as an essential source in order to build instruction on those and move students to more formal ideas through mathematization.

An experienced middle school mathematics teacher who worked in a public middle school in Ankara and her seventh-grade classrooms were selected purposefully. A design team including the authors and the teacher conducted three macrocycles in three consecutive years following the three phases: preparing for the experiment, conducting the design experiment, and retrospective analysis. The HLT and the instructional sequence were tested and revised in those three macrocycles within the context of the larger study. In this study, the final version of the HLT and the instructional sequence are explained in order to propose a local instructional theory for the teaching and learning of proportional reasoning in seventh-grade classrooms. In addition, the ways the hypothesized learning trajectory was realized during the third macrocycle of the study are described in order to support the potential of the proposed trajectory and the instructional sequence to improve student learning.

Data were collected by videotapes of classroom instruction and audiotapes of the design team meetings and debriefing with the teacher. The classroom data were analyzed by Toulmin's model of argumentation, through which students' meaningful learning was examined. The data obtained from the design team meetings and debriefing sessions were analyzed by qualitative methods throughout the study in order to determine the required revisions to the HLT and the instructional sequence and to come up with conjectures regarding the teaching and learning of proportional reasoning. The analysis of those data were not provided in this study due to page restrictions.

The findings of the study showed that the HLT and the instructional sequence has extensive potential to support students' learning of proportional reasoning in meaningful, comprehensive, and increasingly sophisticated ways. The evidence comes from the analysis of the classroom discourse by Toulmin's argumentation model. The students were able to make mathematical claims regarding the big ideas based on valid data and justify those claims with valid warrants. Those data and warrants were mostly related to the horizontal and vertical relationships in the short and long ratio tables, which were referred to as unitizing and norming and iterating linked composites. In addition, the students were able to move from their informal understandings of proportional reasoning (i.e., build up strategies, invariance and covariance, unit rate) to more formal representations of ratio and proportion. In this process, the informal models of long and short ratio tables were also used to support the introduction of the formal representations of ratio and proportion in line with the principles of RME (i.e., emergent models, mathematizing, guided reinvention). Moreover, they used all the previous mathematical ideas (i.e., iterating linked composites, unitizing and norming, unit rate/ratio, informal ratio language, and part-whole relationships) in order to make sense of the last big idea that is comparing rates/ratios. Therefore, it is concluded that teaching ratio and proportion by progressing from informal to formal tools in realistic contexts had significant potential for students' learning of this subject in a meaningful, comprehensive, and coherent ways. In this regard, it is foreseen that the learning trajectory and the instructional sequence will be useful for improving the quality of the teaching and learning of ratio and proportion.

Ek 1.

İnformel ve formel oran ve orantı gösterimlerine yönelik varsayıma dayalı öğrenme rotası				
Anahtar Öğrenme	***Araçlar/İmgeler***	***Paylaşılan öğrenmeler/Muhtemel sınıf içi matematiksel söylemler***	***Muhtemel jest ve metafor***	***Etkinlikler***
Çarpımsal düşünme	Servisle/yürüyerek gelen öğrenciler için resimler çizmek Bilinmeyen içeren kısaltılmış oran tabloları Kısaltılmış tablolarda yatay/dikey ilişkiler için oklar/eğriler kullanılması İnformel oran dili Parça-parça ve parça-bütün ilişkileri Kesir imgesi	Etkinlik 3: $\times 15$ $\times\frac{7}{3}\ \begin{array}{l\|c\|c} \text{Servisle gelen} & 3 & 45 \\ \hline \text{Yürüyerek gelen} & 7 & ? \end{array}$ $\times 15$ Kısa tablolarda verilen, okula servisle ve yürüyerek gelen öğrenciler için kısaltılmış artırma stratejisine yönelik ilişkinin anlamlandırılması (Birleşik birimleri yineleme, yatay ilişki): • Servisle gelen öğrenci sayısı 15 katına çıkarsa yürüyerek gelen öğrenci sayısı da 15 katına çıkar. Kısa tablolarda verilen, okula servisle ve yürüyerek gelen öğrenci sayıları arasındaki ilişkinin anlamlandırılması (Çarpımsal düşünme, dikey ilişki): • Okula servisle gelenlerin sayısı yürüyerek gelenlerin sayısının $\frac{3}{7}$'üdür. • Okula yürüyerek gelenlerin sayısı servisle gelenlerin sayısının $\frac{7}{3}$'üdür. • Okula servisle gelenlerin sayısı $\frac{7}{3}$ ile çarpıldığında her zaman yürüyerek gelenlerin sayısı bulunur. • Okula yürüyerek gelenlerin sayısını $\frac{3}{7}$ ile çarpıldığında her zaman servisle gelenlerin sayısı bulunur.	Oran tablolarında yatay ve dikey ilişkiler için çizilen oklara yönelik eğik el hareketleri	Etkinlik 3: Anket sonuçlarından yola çıkalım Etkinlik 4: Orantı kuralım
	Formel oran dili Sembolik oran gösterimleri (a: b, $\frac{a}{b}$) Sembolik orantı gösterimi: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ Kesir imgesi Parça-parça ve parça-bütün ilişkileri	Okula servisle gelen her 3 öğrenciye karşılık 7 öğrencinin okula yürüyerek geldiği biliniyorsa tüm durumlarda bu ilişki korunmalıdır. Okula servisle gelen her 3 öğrenciye karşılık 7 öğrencinin okula yürüyerek geldiği biliniyorsa bu okuldaki her 10 kişiden 3'ü okula servisle 7'si yürüyerek gelmektedir. Formel oran dilinin gelişmesi ve eşit oranların oluşturulması: Bir sınıftaki kız öğrenci sayısının erkek öğrenci sayısına oranı 12:15'tir. Bu oran 4:5 oranına eşittir. Kız sayısının erkek sayısına oranı 4:5'ken, erkek sayısının kız sayısına oranı 5:4, kız sayısının sınıf mevcuduna oranı 4:9, erkek sayısının sınıf mevcuduna oranı 5:9'dur. Burada kısaltılmış oran tablolarının kenarlıkları kaldırılarak orantının sembolik gösterimine geçilir.	$\rightarrow \frac{K}{E}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$. Sembolik orantı gösteriminde yatay	

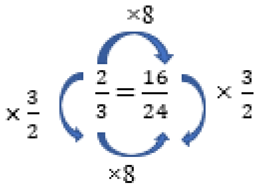
Kesir-Oran ilişkisi

Kesirlerde sadeleştirme ve genişletme

Rasyonel sayılarda çarpmaya göre ters işlem

Kız	12	4
Erkek	15	5

Kısa tablolarda keşfedilen yatay ve dikey ilişkilerin orantı gösteriminde anlamlandırılması:



Yatay ilişki (Birleşik birimleri yineleme, kısaltılmış artırma stratejisi): Kız sayısı 8 katına çıkarsa erkek sayısı da 8 katına çıkar.

Dikey ilişki: Erkek sayısı kız sayısının $\frac{3}{2}$ katıdır.

Kız sayısı ile erkek sayısı birbirine bağlı olarak değişseler bile aralarında değişmeyen (invariant) bir ilişki vardır. Bu ilişkiye birim oran ya da orantı sabiti denir (örn. $\frac{2}{3}$).

Bir sınıftaki kız öğrenci sayısının erkek öğrenci sayısına oranı 12:15'tir. Bu oran 4:5 oranına eşittir. Kız sayısının erkek sayısına oranı 4:5'tir. 4 kıza 5 erkek karşılık geliyor. Erkek sayısının kız sayısına oranı 5:4, kız sayısının sınıf mevcuduna oranı 4:9, erkek sayısının sınıf mevcuduna oranı 5:9'dur. Bu sınıftaki her 9 kişiden 4'ü kız 5'i erkektir.

Kesirler sadeleştiği gibi oranlar da sade ifade edilebilir. Örneğin, $\frac{12}{27}$ oranı 3 ile sadeleştiğinde $\frac{4}{9}$ olur.

Kızların erkeklere oranı olan $\frac{4}{5}$, erkeklerin kızlara oranı oran $\frac{5}{4}$'ün çarpmaya göre tersidir.

ve dikey ilişkiler için çizilen oklara yönelik eğik el hareketleri

Ek 2. Örnek etkinlik

ETKİNLİK 3- ANKET SONUÇLARINDAN YOLA ÇIKALIM

1. Ebru okulundaki öğrencilere bir anket uyguluyor ve okula servisle gelen her 3 öğrenciye karşılık 7 öğrencinin okula yürüyerek geldiği sonucuna ulaşıyor. Buna göre, aşağıdaki soruları verilen tabloları kullanarak cevaplayınız.
   a. Bu okula servisle gelen 45 öğrenci varsa yürüyerek gelen kaç kişi vardır?

Bu okula yürüyerek gelen 49 öğrenci varsa servisle gelen kaç kişi vardır?
   b.

   c. Bu okulda 120 öğrenci varsa kaç kişi okula servisle gelmektedir?

2. Hasan okulundaki öğrencilere bir anket uyguluyor ve her 8 öğrenciden 5'inin en az bir kardeşi olduğu diğerlerinin ise hiç kardeşinin olmadığı sonucuna ulaşıyor. Buna, göre aşağıdaki soruları birbirinden bağımsız olarak cevaplayınız.

a. Bu okulda en az bir kardeşi olan 65 kişi varsa kardeşi olmayan kaç kişi vardır?

b. Bu okulda kardeşi olmayan 90 kişi varsa okulda toplam kaç kişi vardır?

c. Bu okulda toplam 168 öğrenci varsa kaç kişinin en az bir kardeşi vardır?

3. Deniz okulundaki öğrencilere anket uyguluyor ve okuldaki her 9 öğrenciden 4'ünün Beşiktaş, 3'ünün Galatasaray ve 2'sinin Fenerbahçe taraftarı olduğu sonucuna ulaşıyor. Buna göre, aşağıdaki soruları verilen tabloları kullanarak cevaplayınız.

a. Bu okulda 44 kişi Beşiktaş taraftarı ise Galatasaray ve Fenerbahçe taraftarı kaç öğrenci vardır?

b. Bu okulda 60 kişi Galatasaray taraftarı ise Beşiktaş ve Fenerbahçe taraftarı kaç öğrenci vardır?

c. Bu okulda 70 kişi Fenerbahçe taraftarı ise Beşiktaş ve Galatasaray taraftarı kaç öğrenci vardır?

d. Bu okulda toplam 180 kişi varsa Galatasaray, Beşiktaş ve Fenerbahçe taraftarı kaç öğrenci vardır?