

## LİMİT KONUSUNUN BİLGİSAYAR ORTAMINDA GÖRSELLEŞTİRİLMESİ VE FİZİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ KONU HAKKINDAKİ GÖRÜŞLERİ

### VISUALIZATION OF LIMIT IN COMPUTER ENVIRONMENT AND THE VIEWS OF PROSPECTIVE TEACHERS ON THIS ISSUE

Sema Çıldır\*

**ÖZET:** Fizik konularının anlaşılmasında ve fizik problemlerinin çözülmesinde iyi bir matematik alt yapıya ihtiyaç vardır. Bu nedenle ileri matematik konularına temel teşkil eden genel matematik dersi fizik öğrencileri için oldukça önemlidir. Genel matematik konularından olan limit ise türev ve integral kavramlarının anlaşılmasında büyük rol oynar. Bu çalışmada önce fizik öğretmen adaylarının limit konusundaki durumları ve kavram yanlışları tespit edilmiş, genel matematik dersinin içerik ve işleniş biçimi hakkındaki görüşleri alınmıştır. Limit konusundaki eksikliklerine yönelik sağdan-soldan limit, sonsuza yakınsama gibi kavramların daha anlaşılır hale gelmesi için bilgisayar ortamında görselleştirmeler yapılmış ve öğrencilerle birlikte bilgisayar ortamında çalışılmıştır. Çalışma sonucunda, hem limit konusunun kalıcı ve anlamlı öğrenilmesi için hem de öğretmen adaylarının sahip oldukları kavram yanlışlarının ortadan kaldırılması için bilgisayar ortamında gerçekleştirilen görselleştirmelerin faydalı olacağı önerilmektedir. Bir diğer öneri de elde edilen sonuçlar doğrultusunda, genel matematik dersinin içerik olarak fizik öğretmen adaylarına daha uygun planlanmasıdır.

**Anahtar Sözcükler:** fizik öğretmen adayları, genel matematik dersi, görselleştirme, limit ve kavram yanlışları.

**ABSTRACT:** In the comprehension of the subjects of physics and in the correct solution of physics questions, a substantial mathematical foundation is a pre-requisite. Thus, general mathematics course, which is the basis for advanced mathematics, is highly important for students. Limit, which is one of the subjects within general mathematics, plays a crucial role in the comprehension of the concepts of derivative and integral. In this study, first, the levels of prospective teachers regarding the limit and their misconceptions were determined, and their views on the content and methodology of the general mathematics course were asked. Various computer-generated visualizations were done for their deficiencies related to the limit in order to make the concepts such as limit on the right/left and infinite convergence more comprehensible, and students were instructed in a computer environment. As a result of the study, it was recommended that computer-generated visualization was helpful both in order to eliminate the misconceptions of prospective teachers and to teach the limit permanently and meaningfully. In the light of the findings of the study, it was also recommended that the content of the general mathematics course should be re-planned according to the needs of prospective physics teachers.

**Keywords:** prospective physics teachers, general mathematics course, visualization, limit and misconceptions.

## 1. GİRİŞ

Fizik konularının anlatımında ve ilgili konulara yönelik problemlerin çözümünde türev, integral ve diferansiyel denklemler gibi ileri matematik konuları sıklıkla kullanılmaktadır. Bu nedenle gerek fizik eğitimi alanında gerekse fen ve mühendislik fakültelerinin fizik bölümlerinde genel matematik dersi çok önemlidir. İleri matematik konularına lise müfredatında da yer verilmektedir. Ancak öğrencilerin lise yıllarında kazandıkları matematik bilgisinin üniversite matematiğine iyi bir alt yapı oluşturup oluşturmadığı, öğrencilerin ne kadar matematik bildiği araştırma konusu olmuştur. Nasibov ve Yetim (2008) çalışmalarında, lise seviyesinde ileri matematik konularının hemen hemen hiçbir teoriye dayanmadan, pratik olarak birkaç formülle anlatıldığını ve sadece onlara ait örneklerin çözüldüğünü ve bu durumun uygun bir öğretme şekli olmadığını vurgulamışlardır. Doğan, Sulak ve Cihangir (2002), İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim dalına gelen öğrencilerin lise matematik konularında ne kadar hazır geldiklerini tespit etmek amacıyla yaptıkları çalışmalarında Anadolu Öğretmen Lisesi ve Fen Lisesi öğrencilerinin, belirsizlik limitleri, türev ve türev uygulamaları ile ilgili sorulara doğru cevap verme oranlarının çok düşük olduğunu, bu okullara, öğrencilerin seçilerek alınmasına rağmen, lise 3. sınıf konularına doğru cevap veremediklerini tespit etmişlerdir. Bu nedenlerden dolayı, lise eğitimine bağlı olarak, üniversiteye yeni başlayan bir fizik öğrencisi de matematiği ancak temel seviyede ve ezbersel olarak bilmektedir. Ezberci yaklaşımda ise, öğrencinin

\* Öğretim Görevlisi Doktor, Hacettepe Üniversitesi, [sselman@hacettepe.edu.tr](mailto:sselman@hacettepe.edu.tr)

soyut kavramlar hakkında fikir yürütme, yorumlama, sonuçları karşılaştırma gibi becerileri alt düzeydedir. Halbuki üniversite öğrencisi artık daha soyut ifadelerle uğraşmak, bu ifadeleri doğru bir şekilde anlamak ve gerektiğinde problemlere başarı ile uygulamak durumundadır.

Fizik konularının anlaşılmasında ve fizik problemlerinin doğru çözülmesinde, iyi bir matematik alt yapıya ihtiyaç vardır. Ayrıca bir fizik öğrencisi çözdüğü sorunun sonuçlarını yorumlayabilmelidir, çünkü matematiksel olarak elde edilen bir sonucun fiziksel olarak bir anlamı olmayabilir. Bu nedenle yanlış yorumlarda bulunmamak için fizik öğrencisi öncelikle matematiksel ifadeleri doğru kullanarak doğru sonuçlara ulaşmalıdır. Bütün bu etkenler düşünüldüğünde üniversitede verilen genel matematik dersinin önemi bir fizik öğrencisi için daha da artmaktadır.

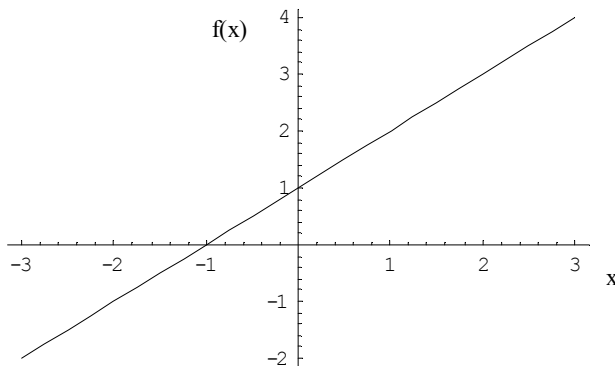
Genel matematik dersi, içerik olarak bir fizik öğrencinin ileri fizik derslerindeki matematiksel donanımını sağlayıcı görünmekle beraber, içerdiği soyut kavramlar nedeniyle anlaşılması güçleşmektedir. Genel matematik kapsamında yer alan limit konusu da oldukça soyut kavramlar içermektedir. Bir fonksiyonun limit değeri, fonksiyonun sonsuza gitmesi durumu, sağdan ve soldan limit değeri gibi soyut ifadelerin fizik öğretmenleri tarafından çok iyi öğrenilmesi, kendi öğrencilerine doğru bir şekilde aktarılabilmesi için çok önemlidir. Literatüre baktığımızda limit konusunun sadece matematik öğrencileri için ele alınmış olması, matematiği ve limit konusunu sıklıkla kullanan fizik öğrencilerine yönelik çalışmaların yapılmış olması bir eksiklik olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu çalışmada, fizik öğretmen adaylarının kuantum fiziği, fizikte matematiksel yöntemler vb. derslerde kullandığı ileri matematik konularından olan türev, integral ve diferansiyel denklemler için temel olan limit konusu ele alınacaktır.

### 1.1. Fonksiyonlarda Limit

Türev ve integral kavramlarını anlamamızı kolaylaştıran “limit” genel matematiğin en güçlü ve en kullanışlı araçlarından biridir ( Çoker ve ark.,1989). Fizik problemlerinin çözümünü kolaylaştıran diferansiyel denklemlerin temelini de limit kavramı oluşturmaktadır. Bu nedenle genel matematik dersi alan fizik öğrencilerinin limit kavramını iyi öğrenmesi fizikte matematiksel yöntemler, klasik mekanik ve kuantum fiziği gibi derslerde, gerek dersi anlamada gerekse fizik problemlerinin çözümünde çok önemlidir. Ancak limit kavramının oldukça soyut olması, bu konunun öğrencilere öğretilmesi ve öğrenciler tarafından öğrenilmesi açısından çok da kolay değildir (Baştürk ve Dönmez, 2011). Tatar, Okur ve Tuna (2008), çalışmalarında Eğitim Fakültesine başlayan öğrencilerin ortaöğretim matematik konularını öğrenmedeki güçlük düzeylerini belirlemişler ve bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliğindeki öğrencilerin limit ve süreklilik konusundaki güçlük düzeyini % 55,56 olarak belirlemişlerdir. Öğretilmesi ve öğrenilmesi zor bir konu olarak karşımıza çıkan limit konusunun öğretilmesinde öncelikle sezgisel bir yaklaşım verilir ( Çoker ve ark.,1989).

Örneğin  $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  fonksiyonunun grafiği Şekil 1’ de verilmiştir.



Şekil 1:  $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  fonksiyonunun grafiği.

Bu fonksiyonun grafiğini,  $x \neq 1$  olan noktalarda  $y = x + 1$  doğrusunun grafiğini çizerek bulabiliriz.  $x = 1$  sayısına sağdan ve soldan yaklaştığımızda fonksiyonun aldığı değerler ise Tablo.1’de verilmiştir. Fonksiyonun limit değeri 2’dir. Bunu grafikten de kolayca görebiliriz.

**Tablo 1:**  $x \rightarrow 1$  ,  $f(x)$  Fonksiyonunun Aldığı Değerler

x	0,99	0,999	0,9999	→	1	←	1,0001	1,001	1,01
f(x)	1,99	1,999	1,9999	→	2	←	2,0001	2,001	2,01

Yukarıdaki grafikten ve tablodaki  $f(x)$  fonksiyonunun aldığı değerlerden limiti tahmin etmek kolaydır fakat grafiği kolayca çizilemeyecek kadar güç fonksiyonların davranışını sezgisel olarak bulmak hiç de kolay değildir. Ayrıca limit konusunda matematik öğretmen adayları ve matematik öğrencileri ile yapılan çalışmalarda öğrencilerin bu konuda kavram yanlışlarına sahip oldukları ortaya çıkarılmıştır. Sonsuz bir limit değeri gibi algılanması, bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa o noktada tanımlı ve sürekli olması gerektiğine inanılması, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının birbirine karıştırılması gibi kavram yanlışları tespit edilmiştir (Baştürk ve Dönmez, 2011). Szydlık (2000), öğrencilerin fonksiyonlarda limit konusundaki matematiksel inanışları ve kavramsal anlayışları üzerine yaptığı çalışmada öğrencilerin, fonksiyondaki değişkenin bir sayıya yaklaşıyor olmasının limitin de yaklaşık bir değer alması gerektiği inanışında olduklarını ortaya çıkarmıştır. Bu kavram yanlışlarıyla birlikte öğrencilerin karmaşık fonksiyonlarla çalışması ve doğru sonuca ulaşması olasılığı da azalmaktadır. Bu nedenle çizimi güç ve hakkında kolaylıkla tahmin yürütülemeyecek fonksiyonlarla karşılaşıldığında, ifadenin bilgisayar desteği ile görselleştirilmesi, soyut ifadelerin daha kolay ve doğru anlaşılmasını sağlayacaktır.

## 1.2. Matematiksel İfadelerin Görselleştirilmesi

Matematiksel kavramların çoğu üst düzeyde bilişsel etkinlik gerektiren soyut kavramlardır (Baki, 2000). Soyut kavramların öğretiminde ise görselleştirme etkin bir yöntemdir. Işık (2007) görselleştirmeyi, soyut kavramların yarı-somut olarak adlandırılabilir geometrik yapılarla ifadesi olarak tanımlamaktadır. Görselleştirmede amaç ise yine aynı çalışmada, bireye soyutlama alışkanlığı kazandırarak bu yolla zihinsel bağımsızlığını ve yaratıcılığını geliştirmek, anlamlı ve kalıcı öğrenmeyi sağlamak olarak ifade edilmiştir. Sweller (2002), çalışmasında görsel hafızaya ve onun karakteristik özelliklerine dayanan tasarımlar üzerinde durmuş ve görsel kavramanın insan bilişinin merkezi olduğunu ileri sürmüştür. Boz (2005), matematiksel kavramların daha iyi anlaşılması için matematik öğretiminde bilgisayar ortamında görselleştirmenin gerekliliğini savunmuştur. Matematik eğitiminde görselleştirme hem araç hem de amaç olmalıdır ( Konyalıoğlu, Konyalıoğlu, İpek ve Işık, 2005). Matematiksel kavramların görselleştirilmesi, sadece matematik dersi için değil matematiği sıklıkla kullanan fizik dersi için de gerekliliktir.

Bazen fizik problemleri ile çalışırken, bir parametrenin artan ya da azalan değerlerine karşılık ele alınan matematiksel ifadenin bütününe ne gibi değişiklikler olabileceğini ve bunun fiziksel bir yorumunun olup olmayacağını düşünmek, hatta gerekirse çözümü daha detaylandırmak gerekebilmektedir. Eğer karşılaşılan ifade kompleks ve uzun matematiksel işlemler gerektiriyorsa, parametrelerdeki değişimlerin sonuca etkisini tahmin etmek ya da sonuç üzerinden giderek ifade hakkında yorumda bulunabilmek güçleşmektedir. Soyut ve kompleks ifadelerin daha anlaşılır hale gelmesi için grafik çizimi bir yöntemdir (Stylianou, 2002). Ancak matematiksel ifadenin güçlük derecesine göre bu yöntem zaman alıcı ve zor olabilir. Hatta grafik çiziminde başarısız bir öğrenci için imkânsız olabilir. Bu nedenle öğrenciye grafik çiziminde yardımcı olabilecek ve öğrencinin kendi kendine öğrenebilmesini sağlayacak alternatif yöntemlere ihtiyaç vardır. Bu çalışmada izlenen yöntem ise, limit konusunun öğretimi için, bilgisayar destekli görsel ortamlar oluşturmaktır. Fizik öğretmen adaylarına bir paket program olan Mathematica 8.0 yardımı ile kendi merak ettiklerini bulma ve göremediklerini grafikte görebilir hale getirme becerisi kazandırmak hedeflenmiştir. Bu çalışmada Mathematica kullanılımasının nedeni, Mathematica'nın yoğun hesaplamalar gerektiren işlemlerde oldukça

hızlı bir programlama dili olmasıdır. Ayrıca iki ve üç boyutlu grafik çizimlerinin yanı sıra veri analizi, fizik, kimya ve mühendislikteki uygulamaları ile oldukça geniş bir işlevsel alanı vardır.

### 1.3 Problem Durumu

Bu çalışmada fizik öğretmen adaylarının;

- Limit konusunun fizikteki yeri ve önemi hakkındaki görüşleri nelerdir?
  - Limit konusunu anlama ve uygulamadaki durumları nedir?
  - Limit konusuna yönelik kavram yanılgıları var mı?
  - Limit konusunun bilgisayar ortamında görselleştirilmesi hakkındaki görüşleri nelerdir?
- sorularına cevap bulmaya yönelik bir araştırma yapılmıştır.

## 2. YÖNTEM

### 2.1. Katılımcılar

Çalışma, bir devlet üniversitesinde, IV. sınıf dersi olan Kuantum Fiziği II (13 öğrenci) ve III. sınıf dersi olan Fizikte Matematiksel Yöntemler (17 öğrenci) derslerini yaz okulunda almakta olan fizik öğretmenliği öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir. Bu dersler, fizik öğretmeni adaylarının ileri matematik konularını sıklıkla kullandığı dersler olduğu için amaçlı olarak seçilmiştir. Katılımcılardan sekiz gönüllü öğrenci ile ayrıca yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

### 2.2 Veri Toplama Aracı

Bu çalışmada nitel veri toplama tekniğine uygun olacak şekilde veri toplanmıştır. Çalışma üç aşamadan oluşmaktadır. Üçüncü aşama olan öğretmen adaylarının konu hakkındaki genel değerlendirmeleri, ilk iki aşamanın geçerliliğini kontrol amaçlı kullanılmıştır. Her aşama farklı bir metot gerektirdiği için veri toplama araçları da farklılık göstermektedir. Çalışmada kullanılan veri toplama araçlarının detayları aşağıda verilmiştir.

#### 2.2.1 Araştırma Kağıdı

Çalışmada, problem durumunda belirtilen sorulara cevap elde etmeye yönelik bir araştırma kağıdı oluşturulmuştur. Araştırma kağıdı dört bölüm içermektedir. İlk bölümde fizik öğretmen adaylarının genel matematik ve limit konusundaki görüşleri alınmıştır. Buradaki amaç, çalışma grubunun limit konusunu bir fizik öğretmeni adayı gözüyle nasıl değerlendirdiğini ortaya çıkarmaktır. Araştırma kağıdının bu bölümünde yeralan soruların problemlere cevap niteliğinde olup olmadığının ve bilimsel doğruluğunun incelenmesi için bir fizik bir matematik eğitimcisinin uzmanlık görüşü alınmıştır. İkinci bölümde öğrencilerden, verilen dört limit sorusunu cevaplamaları istenmiştir. Sorular basitten karmaşığa doğru seçilmiştir. Her sorunun cevabında ilgili fonksiyonun grafiğini de çizmeleri öğretmen adaylarından istenmiştir. Buradaki amaç öğretmen adaylarının grafik çizimi konusundaki yeterliliklerini belirleyebilmektir. Seçilen soruların zorluk sıralaması ve soruların anlaşılabilirliği için iki matematik eğitimcisinin uzmanlık görüşü alınmıştır. Üçüncü bölümde öğretmen adaylarından ikinci bölümdeki dört soruyu problem çözümündeki güçlük derecesine göre kolaydan zora doğru sıralamaları istenmiştir. Son bölümde ise; fizik öğretmen adaylarının, limit konusunda sahip oldukları kavram yanılgılarının tespitine yönelik uygulama yapılmıştır.

#### 2.2.2 Bilgisayar Ortamında Çalışma

Bilgisayar ortamında çalışma aşaması, araştırma kağıdının uygulanmasını takip eden gün yapılmıştır. Böylece adayların ilk aşamada karşılaştıkları soruları ve verdikleri cevapları unutmamaları sağlanmıştır. Öğretmen adaylarına, araştırma kağıdında verdikleri cevaplar ile bilgisayarda oluşturdukları cevapları karşılaştırma fırsatı verilmiştir. “Mathematica 8.0” bilgisayar programının limit konusu ile ilgili komutları örnek soru üzerinde adaylara verilmiştir. Araştırma kağıdında ikinci bölümde yeralan dört limit sorununun bilgisayar ortamında, “Mathematica 8.0” programı yardımı ile hesaplamaları yapılmış ve grafik çizimleri ile fonksiyonların davranışları görselleştirilmiştir. Araştırma kağıdında, üçüncü bölümde, öğretmen adaylarının çoğunluğunun “en zor” olarak belirlediği limit sorusunun detaylı bir incelemesi yapılmış, sağdan ve soldan limit kavramlarının

görselleştirilmesi sağlanmış ve bu fonksiyonun ulaştığı limit değerinde fonksiyonun nasıl davrandığı gösterilmiştir. Öğretmen adaylarının bu aşamadaki davranışları gözlemlenmiş, ortam ses kaydına alınarak öğrencilerin uygulama esnasındaki görüşleri tespit edilmiştir.

### 2.2.3 Öğretmen Adaylarının Konuyla İlgili Genel Değerlendirmeleri

Çalışmanın son aşamasında öğretmen adaylarıyla bilgisayar kullanımının limit konusunu öğrenmeye olan etkileri hakkında görüşmeler yapılmıştır. Ayrıca ilk iki aşamaya yönelik görüşleri alınmıştır. Tüm görüşmeler ses kaydına alınmış ve analiz aşamasında olduğu gibi kullanılmıştır.

## 2.3 Verilerin Analizi

Çalışmanın ilk veri analizi araştırma kâğıdındaki dört bölümün ayrı ayrı değerlendirilmesi ile yapılmıştır. İlk bölümün değerlendirme sonucunda limit konusunda öğretmen adaylarının görüşleri tespit edilmiştir. İkinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerin değerlendirilmesinde, adayların verdikleri cevaplar ile daha önce uzmanlarla birlikte oluşturulan cevap anahtarı karşılaştırılarak bulgular elde edilmiştir. Dört bölümün analizi sonucunda fizik öğretmen adaylarının limit konusundaki durumları hakkında fikir sahibi olunmuştur. Öğretmen adaylarının bölümlere göre % frekansları hesaplanmıştır. Böylece nitel araştırma desenindeki bu çalışmanın nicel verilerle de desteklenmesi ve güvenilirliğin artırılması amaçlanmıştır. Çalışmanın ikinci aşamasında, bilgisayar ortamında öğrencilerle birlikte çalışılmış ve bu sırada program hakkındaki görüşleri ses kaydına alınarak bulgular kısmı için değerlendirilmiştir. Üçüncü aşamada ise genel olarak limit konusunun öğretimi ve öğrenimi için bilgisayar kullanımı hakkında fizik öğretmen adaylarının düşünceleri, önerileri ve eleştirileri olduğu gibi ele alınıp, bulgular kısmında değerlendirilmiştir.

## 3. BULGULAR

Çalışmayı oluşturan üç aşama için yapılan veri analizlerine ait bulgular aşağıda verilmiştir.

### I.Aşama

#### A- Genel Matematik Dersi ve Limit Konusuna Yönelik Öğrenci Görüşleri

##### 1) Limitin tanımını yapabilir misiniz?

Katılımcıların %16,66'nin limitin tanımını boş bıraktığı, %16,66'nin limiti belli bir değere yakınsama olarak tanımladığı, %10'nun bir fonksiyonun alabileceği maximum ya da minimum değer olarak tanımladığı, %56,66'nin birbirinden farklı yanlış cevaplar yazdığı belirlenmiştir.

##### 2) Limit konusunu fizikte hangi konularda kullandınız/kullanmaktasınız?

Katılımcıların %10'nun bu soruyu boş bıraktığı, %26,66'nin "hemen her konuda" şeklinde genelleme yaptığı, %63,34'nün ise "Fizikte Matematiksel Yöntemler, Diferansiyel denklemlerin kullanıldığı tüm konular, Kuantum Fiziği" gibi konuları ifade ettiği belirlenmiştir.

##### 3) Sizce limit konusu fizikte önemli bir konu mudur?

Katılımcıların %16,66'nin soruya "kısmen" şeklinde cevap yazdığı, %83,33'nün ise "Evet. Önemlidir." şeklinde cevap yazdığı belirlenmiştir.

##### 4) Genel matematik dersi içerik ve işleniş yöntemi olarak sizin için yeterli midir?

###### Önerileriniz varsa yazınız.

Katılımcıların %16,66'nın bu soruyu cevapsız bırakmış olduğu, %16,66'nın yeterli bulduğu, % 66,68'nin bu dersin fizik öğretmeni adayları için yeterli olmadığını ifade ettiği belirlenmiştir. Öğretmen adaylarından %20'si ise hiçbir öneride bulunmamıştır. Bazılarının önerilerine örnekler ise aşağıdaki gibidir (Ö: öğretmen adayı, A: Araştırmacı):

Ö1: "Bu dersle ilgili fizikte kullanacağımız şeyleri daha ayrıntılı işleyebiliriz."

Ö2: "Ezbere dayalı olmamalı. Daha farklı yöntemlerle fizik kurallarında kullanacağımız türde konu ağırlıklı olsa daha güzel olur."

Ö3: “Matematik dersi, fizikçiler için çok geniş kapsamlı anlatılmakta, oysa sadece bir fizikçinin kullanacağı konular geniş kapsamda anlatılsa daha iyi olacağını düşünüyorum.”

Ö4: “Ders yeterli fakat matematik ile fiziğin yakın bağlantısını kurabileceğimiz bir ders olması gerekiyor. Matematik dersinde sadece matematik değil aynı zamanda fizikle ilişkisini kurmamız lazım.”

**5) Matematik derslerinizde size yardımcı olabilecek bilgisayar programları kullandınız mı? Kullandıysanız program adları nelerdir?**

Öğretmen adaylarının % 100 ünün “Hayır.” Ya da “Kullanmadım.” şeklinde cevap verdikleri tespit edilmiştir.

**B-Verilen Fonksiyonlara Ait Limit Değerlerinin Bulunması ve Grafiklerinin Çizimi**

1)  $x > 0$  olmak üzere  $y(x) = \frac{1}{x}$  fonksiyonunun  $x \rightarrow 0$  için limit değeri nedir? Grafiğini çiziniz.

Öğretmen adaylarının %36.6 sı bu soruya yanlış cevap vermiş ve grafik çizmemişlerdir. %20 si soruya “tanımsız” cevabını vermiş ve grafik çizmemişlerdir. Diğerleri (%43.3) ise soruya doğru cevap vermişler ve grafiklerini çizmişlerdir.

2)  $x > 0$  olmak üzere  $y(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$  fonksiyonunun  $x \rightarrow \infty$  için limit değeri nedir? Grafiğini çiziniz.

Öğretmen adaylarının % 30 u bu soruya yanlış cevap vermiş ya da boş bırakmıştır. %70 i doğru cevap vermiştir. Doğru cevap verenlerden %20 sinin ilgili grafiği doğru çizdiği belirlenmiştir.

3)  $y(x) = x \sin x$  fonksiyonunun  $x \rightarrow \infty$  için limit değeri nedir? Grafiğini çiziniz.

Öğretmen adaylarından bu soruya doğru cevap veren ve grafik çizen olmamıştır.

4)  $y(x) = \frac{10^x - 1}{x}$  fonksiyonunun  $x \rightarrow 0$  için limit değeri nedir? Grafiğini çiziniz.

Öğretmen adaylarından bu soruya doğru cevap veren olmamıştır. Bir öğrenci grafik çizimini yapmıştır.

**C- İkinci Bölümdeki Soruların Kolaydan Zora Doğru Sıralanması**

Öğretmen adaylarının bu kısımda verdikleri cevaplardan limit sorularının kolaydan zora doğru sıralaması büyük bir çoğunlukla 1,2,4,3 ve 1,2,3,4 şeklinde olmuştur. Bu iki sıralamadan farklı sıralama yapan 6 öğrenci tespit edilmiştir.

**D- Öğretmen Adaylarında Tespit Edilen Kavram Yanılgıları**

1) Bir fonksiyonun limiti x sonsuza giderken sonsuz olabilir mi?

Öğretmen adaylarının %80 i, bu soruya “Evet.”, “Olabilir.” şeklinde yanlış cevap vermiştir. Adayların %20 si ise soruyu cevapsız bırakmıştır.

2) Bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa o noktada tanımlı ve sürekli olması gerekli midir?

Bu soruya cevap vermeyen (boş bırakan ) aday bulunmamaktadır. Adayların %50 sinin “Evet.” “Olabilir.” şeklinde yanlış cevap vermiş olduğu, % 50 sinin ise “Hayır, gerekmez.” şeklinde doğru cevap verdiği tespit edilmiştir.

**II. Aşama: Bilgisayarda Uygulama**

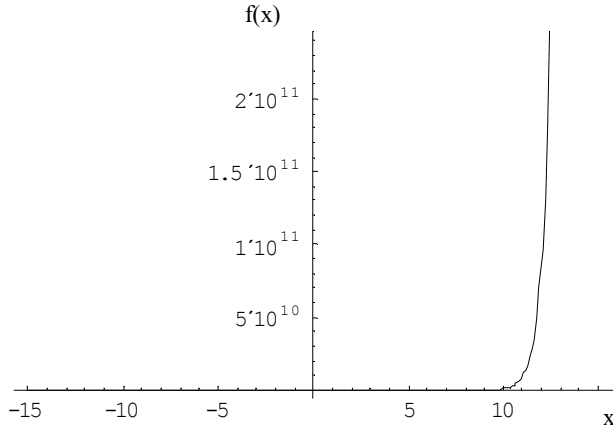
Çalışmanın bu aşamasında, limit konusunun bilgisayar ortamında görselleştirilmesi yapılmıştır. Bu amaçla öğretmen adaylarına ilgili bilgisayar komutları verilmiştir. Çalışmanın ilk aşamasında sorulan limit değeri hesapları ve ilgili fonksiyonların grafik çizimleri bilgisayar ortamında oluşturulmuştur. Öğrencilerin hemen hepsinin “en zor” soru olarak belirledikleri ilk aşamanın son sorusu detaylandırılarak incelenmiştir. Bu kapsamda sağdan ve soldan limit kavramının görselleştirilmesi gerçekleştirilmiştir. Öncelikle fonksiyonun limit değeri bilgisayar programı ile hesaplanmıştır:

$$\text{Limit}[(10^x - 1)/x, x \rightarrow 0] = \ln 10 = 2.30259$$

Bu aşamada öğretmen adaylarının hemen hepsinin bu programla “sonuca oldukça hızlı ve kolay ulaşıldığını” ifade ettikleri belirlenmiştir.

Limit değeri hesaplandıktan sonra çizim komutu ile sağdan ve soldan limit incelemesi yapılmıştır (Şekil 2).

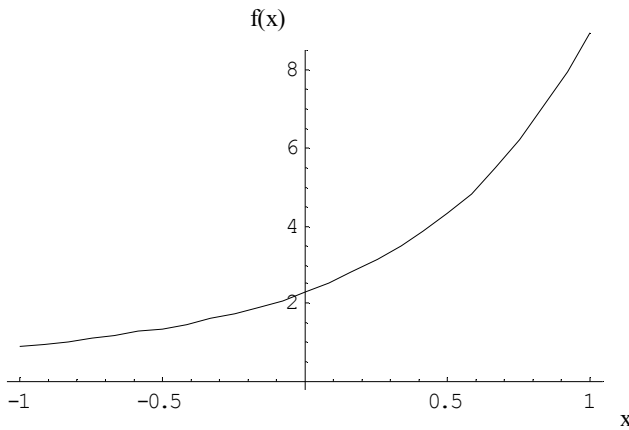
Plot[(10<sup>x-1</sup>)/x, {x,-15,15}]



**Şekil 2: [-15,15] Aralığındaki Fonksiyonun Grafiği**

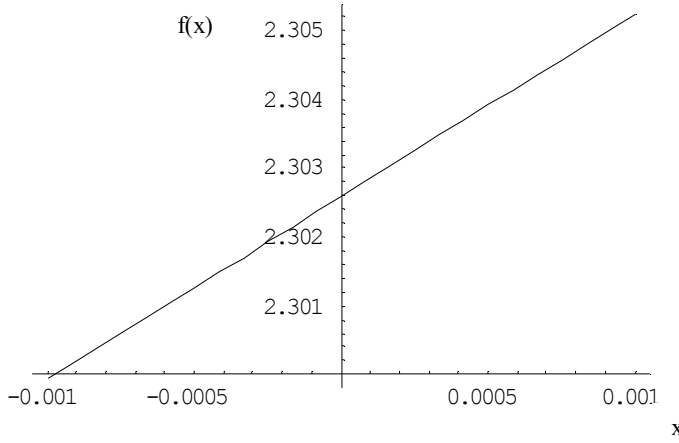
Bu aşamada, önce  $x$  değeri geniş bir çalışma aralığında seçilmiştir. Çizim öncesi, fizik öğretmen adaylarının, grafiğin davranışını doğru tahmin edemediği bulgusu saptanmıştır.

Şekil üzerinde fonksiyonun  $y$  eksenindeki değerlerine ve grafiğin şekline dikkat çekilmiştir. Daha dar bir çalışma aralığı için fonksiyonun grafiğinin davranışı hakkında öğretmen adaylarından tahminler alınmıştır. [-1,1] aralığı için yeni çizim oluşturulmuştur (Şekil 3).



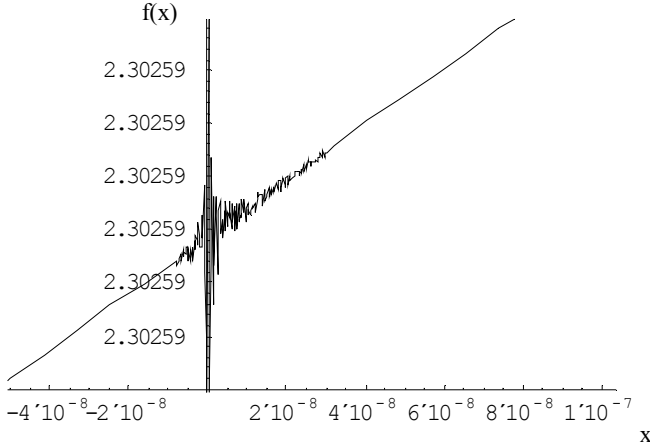
**Şekil 3: [-1,1] Aralığındaki Fonksiyonun Grafiği**

Fonksiyonun grafiğinin ikinci bölgeye geçebileceğini kimse tahmin edememiştir. Şekil 4’de çalışma aralığı  $10^{-3}$  mertebesine kadar azaltılmıştır. Böylece  $x$  ekseninde, sıfır sayısına sağdan ve soldan iyice yaklaşılmıştır. Burada  $y$  eksenindeki değerlere dikkat çekilmiştir.



**Şekil 4: [-0.001,0.001] Aralığındaki Fonksiyonun Grafiği**

y eksenindeki değerlerin hesaplanan limit değerine yaklaştığı bulgusu elde edilmiştir. Bu aşamada daha dar bir aralık için tahminler alınmış ve yeni çizim oluşturulmuştur (Şekil 5).



**Şekil 5: [-10<sup>-8</sup>,10<sup>-8</sup>] Aralığındaki Fonksiyonun Grafiği**

Şekil incelendiğinde fonksiyonun artık hep aynı değeri (2.30259) aldığı bu değer de yine Mathematica'da aynı fonksiyon için hesaplanan limit değerine eşit olduğu bulgusu elde edilmiştir. Hesaplama tekniği ile elde edilen limit değerine görsel olarak da ulaşılabilmektedir.

Bilgisayarda uygulama aşamasında araştırmacı tarafından yapılan gözlemlere göre; sekiz öğrencinin de yapılan uygulamalara karşı oldukça hevesli olduğu belirlenmiştir. Ayrıca soruların çözümlerini ve fonksiyonların grafiklerini gördükçe kendi yanlışlarını analiz etmeye başladıkları da gözlemlerden elde edilen bir diğer bulgudur.

### III. Aşama: Öğretmen Adaylarının Genel Görüşleri

Son aşamada fizik öğretmen adaylarından genel matematik dersinin işleniş biçimi, içeriği ve limit konusunun bilgisayarda görselleştirilmesi üzerine genel görüşleri alınmıştır. Öğrencilerin sözlü açıklamalarından elde edilen bulgular ilk iki aşamada elde edilen bulguları desteklemekte ve ilk iki aşamaya açıklık getirmektedir. Elde edilen bulgulardan bazıları aşağıda verilmiştir:

Görüşmeye katılan öğretmen adaylarının hemen hepsi “Genel matematik dersinin içeriği sizin için yeterli mi?” sorusuna, “yeterli değil” cevabını vermişlerdir. Bunun nedeni olarak adayların üzerinde durduğu sebepler; içeriğin fizikçilere yönelik olmaması ve derste çözülen örneklerin fizik konularına uygun seçilmemesi olarak belirlenmiştir.

“Grafik çiziminde kendinizi başarılı görüyor musunuz?” sorusuna verilen genel cevap “pek değil” şeklinde olmuştur. Açıklama olarak; tanınmış ya da önceden çizimini bildikleri fonksiyonların



grafiklerini daha kolay çizdiklerini ancak ilk defa karşılaştıkları durumlarda çizimde güçlük yaşadıklarını ifade etmişlerdir.

“*Bilgisayar yardımıyla fonksiyonlarda limit konusu ve çizimler sizin için faydalı oldu mu?*” sorusuna genel olarak “Evet. Faydalı oldu.” cevabı verilmiştir. Açıklama olarak iki neden üzerinde durulmuştur; birincisi şekil üzerinde konunun daha iyi anlaşıldığı, ikincisi ise kendi kendilerine de çalışabilecek olmalarıdır.

“*Genel olarak önerileriniz ya da eleştirileriniz nelerdir?*” sorusuna yönelik en genel öneriler; bilgisayar ortamında yapılan bu çalışmanın diğer matematiksel ifadelerle de uygulanması, genel matematik dersinde bu tür görsellerin kullanılması, genel matematik dersinde fizikle ilgili örneklere daha çok yer verilmesi şeklindedir. Bu konuda bir öğrenci tarafından yapılan eleştiri ise; matematik dersinde bu tür programların kullanımının fazla zaman alacağı şeklindedir.

#### 4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Araştırmadan elde edilen bulgulara göre sonuçlar aşağıda verilmiştir:

- Fizik öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu bir fonksiyon için limit alma kurallarını bilmekte fakat limitin ne olduğunu (tanımını) bilmemektedir.
- Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu limiti fizikte hangi konularda kullanacağını farkında ve bu konuyu önemli bulmaktadır.
- Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu genel matematik dersinin fizik öğretmen adayları için yeterli olmadığını düşünmekte ancak çok azı bu konuda öneride bulunmaktadır.
- Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının tamamı matematik derslerinde daha önce herhangi bir program kullanmamış olduğu ve adaylar bu tür programlar hakkında bilgi sahibi değildir.
- Verilen fonksiyonlara göre limit alma çalışmasında ilk iki soruya doğru cevap veren öğretmen adayı tespit edilmiş fakat son iki soruya doğru cevap veren aday çıkmamıştır. Fonksiyon zorlaştıkça çözüme giden öğrenci olmamıştır.
- Daha önce literatürde matematik öğrencileri için belirlenmiş olan limit konusuna ait kavram yanlışlarına fizik öğretmen adaylarının da sahip olduğu belirlenmiştir.
- Bilgisayarda uygulama aşamasında öğrenciler kendi yanlışlarını analiz etmeye başlamışlardır. Bu durum da bilgisayarda görselleştirmenin fizik öğretmeni adaylarının kendi kendine öğrenmelerine yardım ettiği sonucunu vermektedir.

Bir fizik öğretmeni fizikteki soyut kavramları öğrencilerine anlatırken ve problem çözerken yine soyut kavramların yer aldığı matematiği kullanmak zorundadır. Bu da fizik öğretmenin işini oldukça güçleştirmektedir. Bu nedenle genel matematik dersinin içerik ve işleniş yöntemi fizik öğretmeni adayları için oldukça önemlidir. Bu konudaki öğrenci görüşleri de dikkate alındığında genel matematik dersinin içeriğinin biraz daha fizik öğretmen adaylarına yönelik düzenlenmesi oldukça faydalı olacaktır. Problem çözümü için seçilen sorular fizik öğretmen adaylarının ileri fizik konuları için daha hazır konuma getirilmiş olacaktır.

Bu çalışmada ele alınan limit konusunun kalıcı ve anlamlı öğrenilmesi için bilgisayar ortamında görselleştirme önerilmektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının sahip olduğu kavram yanlışlarının ortadan kaldırılması ya da bu yanlışların hiç oluşmaması için yine bu tür bilgisayar programlarının kullanılması faydalı olacaktır. Bu anlamda çalışma, sadece limit konusunun görselleştirilmesi ile sınırlı kalmayıp diğer matematiksel ifadelerle de genişletilebilir. Bunun için iki yöntem önerilebilir: Birincisi genel matematik ders sorumlusunun bu tür programları kullanarak daha önceden hazırladığı grafikleri derste sunu olarak göstermesi, böylece soyut kavramların görselleştirilmesi ikinci ise bu tür programlardan öğrencileri haberdar edip onları kendi kendine öğrenmeye teşvik etmesi şeklinde olabilir.

Çalışmada seçilen Mathematica 8.0 programı her ne kadar kullanışlı ve zengin içerikli bir program olsa da yasal erişim bakımından pahalı sayılabilecek bir program olması nedeni ile dezavantaja sahiptir. Lisanlı bir programa erişilememesi durumunda önerilen program, internette

ücretsiz olarak indirilebilen GeoGebra'dır. Bu program da grafik çizimleri için oldukça kolay bir menüye sahiptir. Öğrencilerin kendi kendine öğrenmesine katkıda bulunacaktır.

#### KAYNAKLAR

- Baki, A. (2000). Bilgisayar Donanımlı Ortamda Matematik Öğrenme. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*.19, 186-193.
- Baştürk, S. Ve Dönmez, G.(2011). Mathematics Student Teachers' Misconceptions on the Limit and Continuity Concepts. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)* Cilt 5, Sayı 1, 225-249.
- Boz, N. (2005).Dynamic Visualization and Software Environments. *The Turkish Online Journal of Educational Technology – TOJET*.Vol:4, 26-32.
- Çoker, D.,Özer, O. ve Taş, K.( 1989 ).*Genel Matematik*, 2. Baskı.Verso Yayıncılık.
- Doğan, A.,Sulak, H. Ve Cihangir, A. (2002, Eylül) *İlk Öğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğrencilerinin Özel Fonksiyonlar İle Fonksiyonlarda Limit, Türev Ve Türev Uygulamaları Konularındaki Yeterlikleri Üzerine Bir Araştırma*, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Konyalığlu, S.,KonyalıoğluA.C., İpek, A.S. & Işık, A. (2005, 21 Eylül). The Role of Visualizaton Approach on Student's Conceptual Learning. *International Journal for Mathematic Teaching and Learning*.06.09.2011 tarihinde <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal> adresinden alınmıştır.
- Nasibov,F.H., ve Yetim, S.(2008). Elemanter Matematik ve Yüksek Matematik Kavramları Hakkında.. *Fırat Üniv. Fen ve Müh. Bil. Dergisi*, 20 (3), 423-431.
- Stylianou, D.A., (2002). On The intraction of visualization and analysis: The negotiation of visual representation in expert problem solving, *The Journal Mathematical Behaviour*, 21(3), 303-317.
- Sweller,J.(2002). *Visualisation and Instructional Design*. Internatioanl Workshop on Dynamic Visualizations and Learning, Tübingen-Germany,
- Szydlık, J.E.(2000). Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function., *Journal for Research in Mathematics Education.*, Vol. 31, No. 3, 258-276.
- Tatar, E., Okur, M. ve Tuna, A. (2008). Ortaöğretim Matematiğinde Öğrenme Güçlüklerinin Saptanmasına Yönelik Bir Çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*,Cilt: 16,No:2 ,507-516.

#### Extended Abstract

Advanced mathematics subjects such as derivative, integral and differential equations are frequently used in physics lectures and solutions of related problems. Thus, general mathematics course is highly important both in physics education and in the physics departments of faculties of engineering and science. However, whether the level of mathematics taught at high schools provide a good foundation for the university-level mathematics has been a much-researched issue. In their study, Nasibov and Yetim (2008) emphasize that advanced mathematics topics are introduced merely through a few practical formulae without any theoretical basis in high school-level mathematics courses, and that this is far from the appropriate method of teaching. In their study, which was done in order to determine to what extent high school students get prepared in the high-school level mathematics topics, Dogan, Sulak and Cihangir (2002) determine that students who attend Anatolian High Schools and Science High Schools have a low ratio of correct answers to questions related to indeterminacy limits, derivative and derivative applications, and that although these students are there as a result of their success in the placement exam, they cannot answer correctly the questions on senior-year topics. Therefore, a freshman physics student has a knowledge of mathematics only on a basic and rote level. In a learn-by-rote education system, a student's skills of interpreting, opining, or comparing the results of abstract concepts are very basic. Nevertheless, a university student is required to deal with abstract concepts, to comprehend these concepts correctly and to be able to apply them to problems when necessary.

“Limit” is one of the most functional and powerful tools of general mathematics which enables us to understand the concepts of integral and derivative (Coker et al, 1989). The basis of the differential equations, which facilitate the solution of physics problems, is also the concept of limit. Therefore, a solid comprehension of the concept of limit is highly important in the success of physics students, who take general mathematics courses, in the physics courses as well as in solving physics problems. However, as the concept of limit is rather abstract, teaching and learning it is not really easy (Basturk and Donmez, 2011). In their study, Tatar, Okur and Tuna (2008) determine the difficulty levels of learning secondary school-level mathematics subjects of freshmen of Faculty of Education, and they determine that students of primary school mathematics education have a 55.56% of learning

difficulty in relation to limit and continuity. Limit presents itself as difficult to learn and teach. Thus, when teaching limit, an intuitive approach is used (Coker et al, 1989).

When faced with functions that are difficult to draw and difficult to guess about, it would be a good idea to visualize the expression in a computer environment.

This study was realized with the participation of physics education students who are enrolled in Quantum Physics (13 students) and Mathematical Approaches in Physics (17 students) courses during the summer term. These courses were selected as they are the ones that frequently make use of advanced mathematics subjects of a prospective physics teacher. Semi-constructed interviews were also done with 8 of the participants.

In this study, data was gathered according to the qualitative data gathering technique. The study consists of 3 phases. The third phase – the general evaluation of prospective teachers on the issue – was used as a means of checking the validity of the first two phases. Since each phase requires a different method, data gathering tools are likewise different. In the first phase, the views of prospective teachers on the general mathematics course were asked, and questions were directed at them in order to determine conceptual confusions; they were asked questions about limit and graphic drawing. In the second phase, computer-generated visualizations of limit were made, and in the third phase, general views of prospective teachers on the methodology of general mathematics course and computer visualizations were asked.

Findings of the study are as follows:

- Most of the prospective teachers know the rules of limit for a function, but they do not know what limit is.
- Most of the prospective teachers are aware of the uses of limit in physics, and they consider limit an important topic.
- 80% of prospective teachers find the general mathematics course insufficient for prospective physics teachers, but only 20% of them make suggestions on this.
- None of the prospective teachers who participated in this study have used a computer program in mathematics courses, and none of them are aware of the existence of such programs.
- While taking the limit of the given functions, there were some who correctly answered the first two questions, but there was no one to answer the last two questions correctly. This was an expected result when we selected the questions according to their difficulty levels.
- It was determined that misconceptions related to the concept of limit that were pointed out for mathematics students in literature is true for prospective physics teachers as well.

A physics teacher should use mathematics, which consists of abstract concepts, while teaching abstract concepts in physics or solving problems. This makes it difficult for a physics teacher. Thus, the method of teaching and the content of general mathematics course are highly important for prospective physics teachers. When the views of students are taken into consideration, it can be said that the content of this course should be re-arranged so as to make it more helpful for prospective physics teachers. If the questions for problem solving are selected in a way that prospective physics teachers would use in the future, then, prospective physics teachers would be more ready for advanced physics subjects.

In this study, it was suggested that computer-generated visualizations be used for a permanent and meaningful learning of limit. Moreover, such programs would be helpful in eliminating the misconceptions of prospective teachers or in preventing the existence of these misconceptions in the first place. Two methods can be suggested for this. First of all, the instructor should use such programs and show the graphics he or she has prepared as a presentation so that abstract concepts become visual. Secondly, the instructor should encourage his or her students to learn these programs themselves by making them aware of the existence of such programs.

Although the software Mathematica 8.0 selected for this study is a user-friendly and rich in content, it is also expensive, which can be a disadvantage in terms of accessibility. In the event that a licensed program is not accessible, GeoGebra is recommended, since it can be downloaded for free. This software, too, has a user-friendly menu for graphic drawing. It would contribute to the self-education of students.